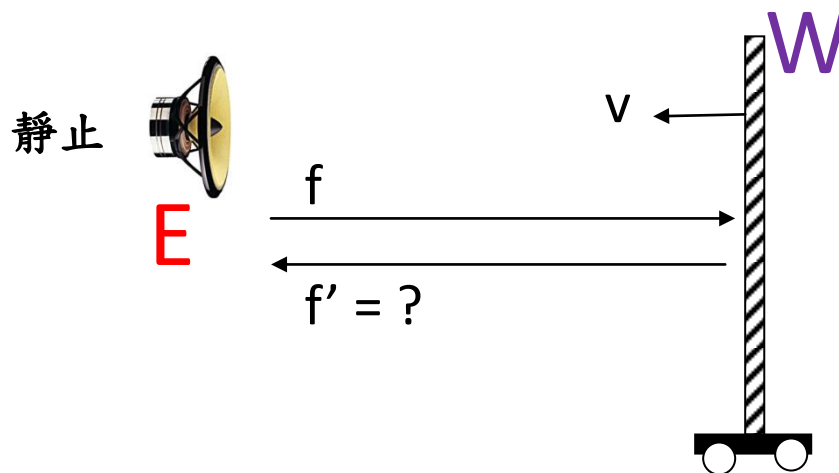


一道關於 Doppler effect - moving reflector 的問題：

一個沒有移動的聲音發射器，它同時也是聲音接收器（以下稱為 E）向一道以速度  $v$  向其移近的牆（以下稱為 W）發出頻率為  $f$  的聲音。問題是 E 收到經 W 反射的聲音頻率為多少？



其中一個解法是「鏡像法」：

像鏡子般，反射聲音像來自 W 後 E 的像 (image, 以下稱為 E')。

因牆 W 向 E 以 v 移動，E' 則以 2v 向 E 移動。



所以，問題就變成「波源以 2v 向觀察者移近的 Doppler effect」。

即是

$$f' = \frac{c}{c-2v} f \quad \dots\dots(1)$$

其中 c 是波速。

可惜，式 (1) 是錯誤的！

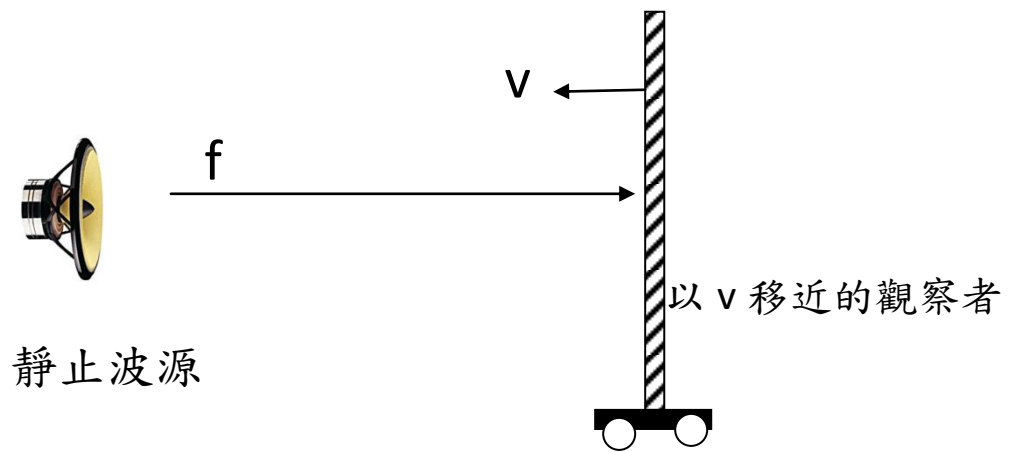
正確的答案是怎樣？

[提示：聲音的 Doppler effect 的另一關鍵主角是聲音的傳播介質 (medium)]

我們用三個方法去解這問題。

(方法一) 常見書本的「W 先為觀察者 (observer)，後再為波源 (source)」方法：

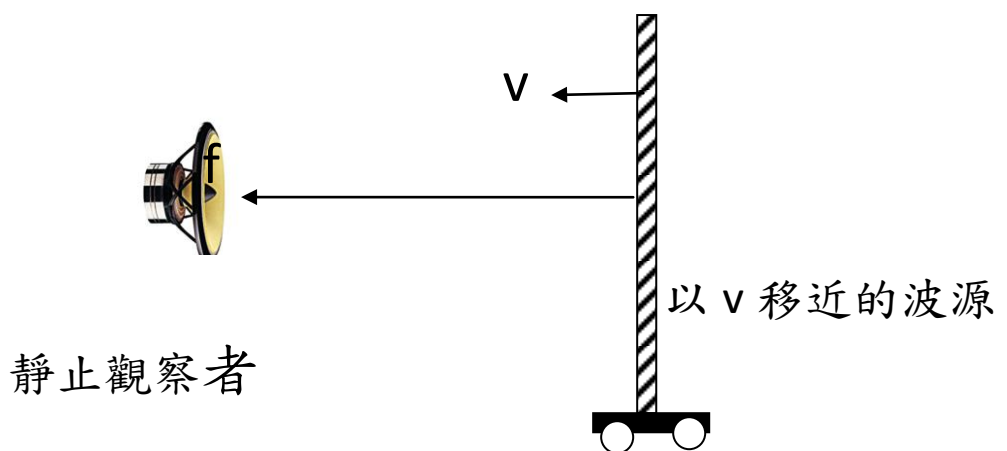
步驟 1



牆 W 收到的音頻

$$f_w = \frac{c}{c-v} f$$

步驟 2



E 收到由 W 發出的聲音  $f'$  ，

$$f' = \frac{c + v}{c} f_w$$

所以，

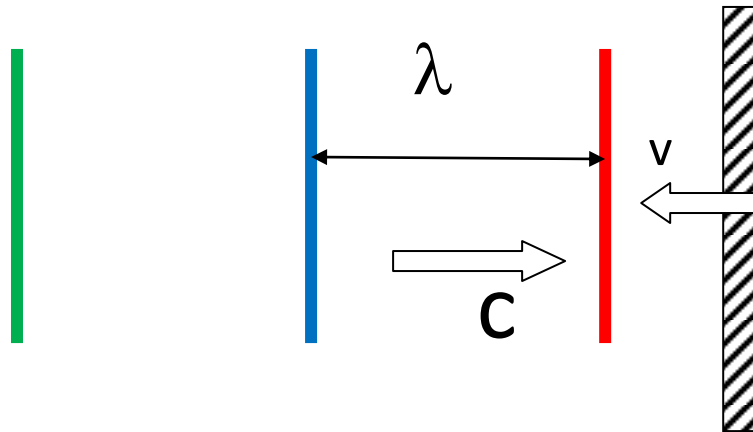
$$f' = \frac{c + v}{c - v} f$$

..... (2)

(2) 才是正確答案。

-----

(方法二) 以 E 全程為觀察者，看自己發出的波如何在牆反彈，  
用基本原理(first principle) 把答案找出。



因為是以 E 為觀察者，而 E 相對空氣（介質）靜止不動，所以  
E 看到自己發出的波是正常的波長  $\lambda$  和以波速  $c$  傳播。

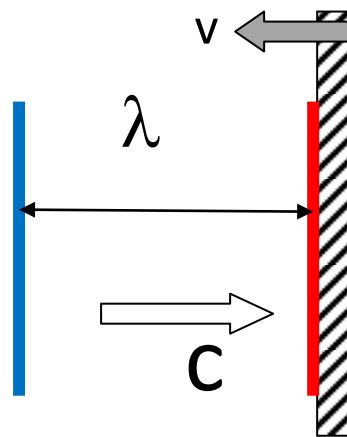


圖 2 (a)

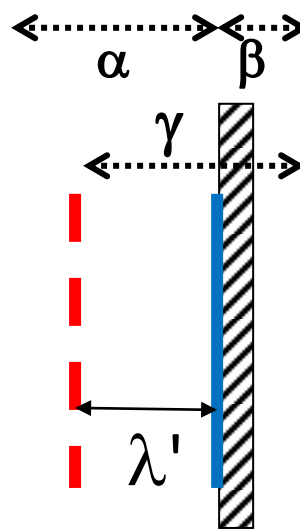


圖 2 (b)

圖 2(a) 題示紅色的波陣面 (wavefront) 剛到達  $W$  和在此時反彈。設此時時間為 0。

紅色波陣面和藍色波陣面的距離為原波長  $\lambda$ 。

圖 2(b) 題示紅色波陣面反射後到達虛線位置。設此時時間為  $t$ 。

而藍色波陣面亦在此際到達  $W$ 。

- 距離  $\alpha$  是藍色波陣面用時間  $t$ ，以速度  $c$  行走的距離。所以

$$\alpha = ct。$$

- 距離  $\beta$  是牆  $W$  用時間  $t$ ，以速度  $v$  行走的距離。所以  $\beta = vt$ 。
- 距離  $\gamma$  是紅色波陣面用時間  $t$ ，以速度  $c$  反彈後行走的距離。  
所以  $\gamma = ct$ 。(亦即是  $\alpha = \gamma$ )。

在圖 2(b)，藍色波陣面在此時剛反射，所以此時紅色虛線與藍色波陣面的距離就是反射波波長  $\lambda'$ 。

比較圖 2(a) 和圖 2(b)，不難看到

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \lambda \\ \gamma - \beta = \lambda' \end{cases}$$

即是

$$\begin{cases} ct + vt = \lambda & \dots\dots\dots(3) \\ ct - vt = \lambda' & \dots\dots\dots(4) \end{cases}$$

用 (3) 和 (4) 解出  $\lambda' = \frac{c-v}{c+v} \lambda$

反射波的速速是  $c$ ，所以  $E$  接收的聲音頻率是

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c+v}{c-v} f$$

亦即是式 (2) 。

---

### (方法三) 像方法 (image method)

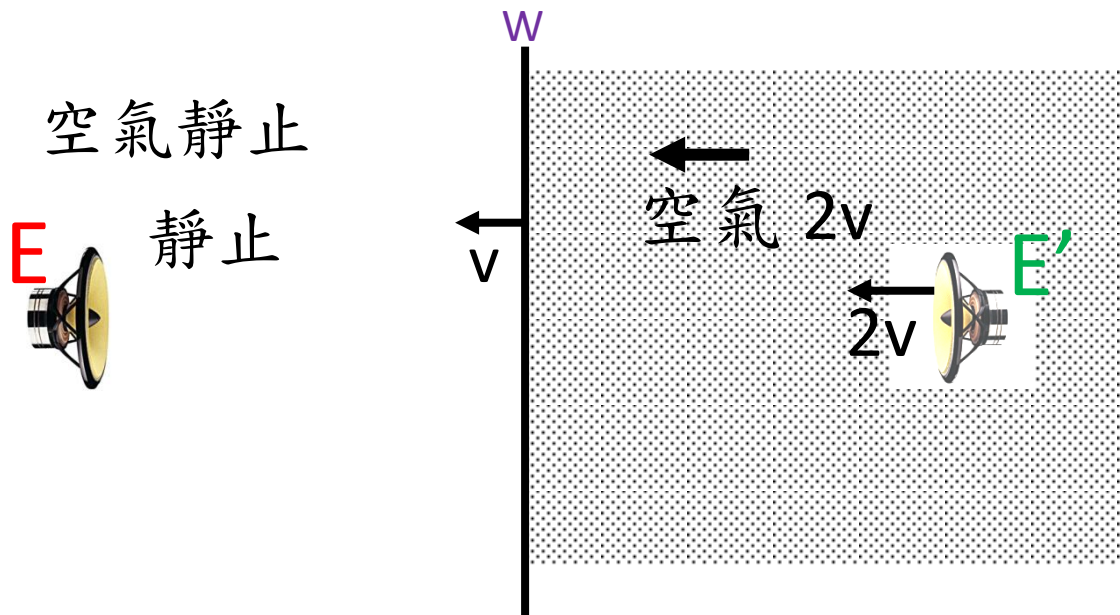
Image method 不是錯的嗎？非也！

Image method 沒有錯，只要分析正確，答案也正確。

大家需知道，聲音的 Doppler effect 的另一關鍵主角是波的傳播介質 (medium)，即是空氣。當觀察者相對介質是靜止的，那傳過來的波的波速才是  $c$ ；而當觀察者相對介質是以  $v$  運動，那波速就變成  $c \pm v$ ，是  $+$  還是  $-$ ，要視乎波的傳播和  $v$  的方向。

**E** 周圍的介質在牆 **W** 內也成像。正確的 image method 必須要考慮這點。

正確的 image method 所描述的圖像應該是：



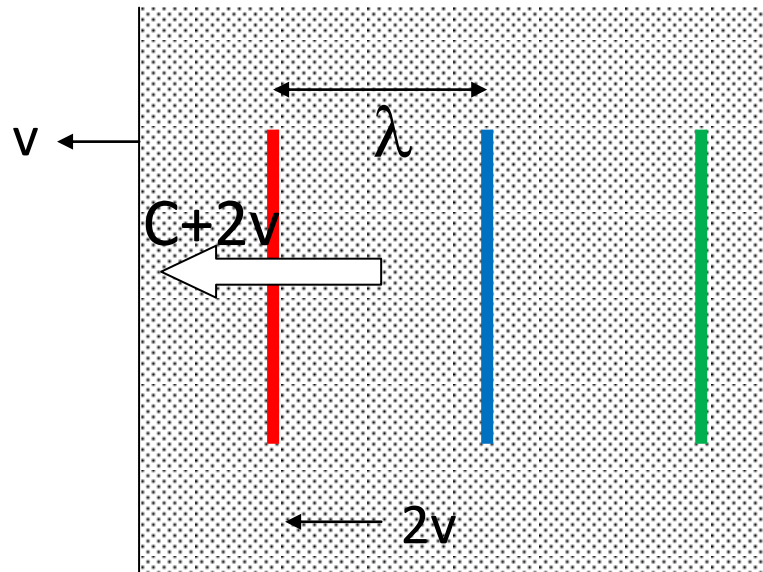
$E$  看到的是

1.  $E'$  以  $2v$  向著它移近。
2.  $E'$  周旁的空氣以  $2v$  向著它移近。
3.  $E$  周旁不動的空氣與  $E'$  周旁動的空氣的邊界 ( $W$ ) 以  $v$  向著它移近。

這情景沒有直接公式可用。惟有把以上各項考慮，然後利用像方法(二)的基本原理找出正確答案！好，讓我們試試如何做。

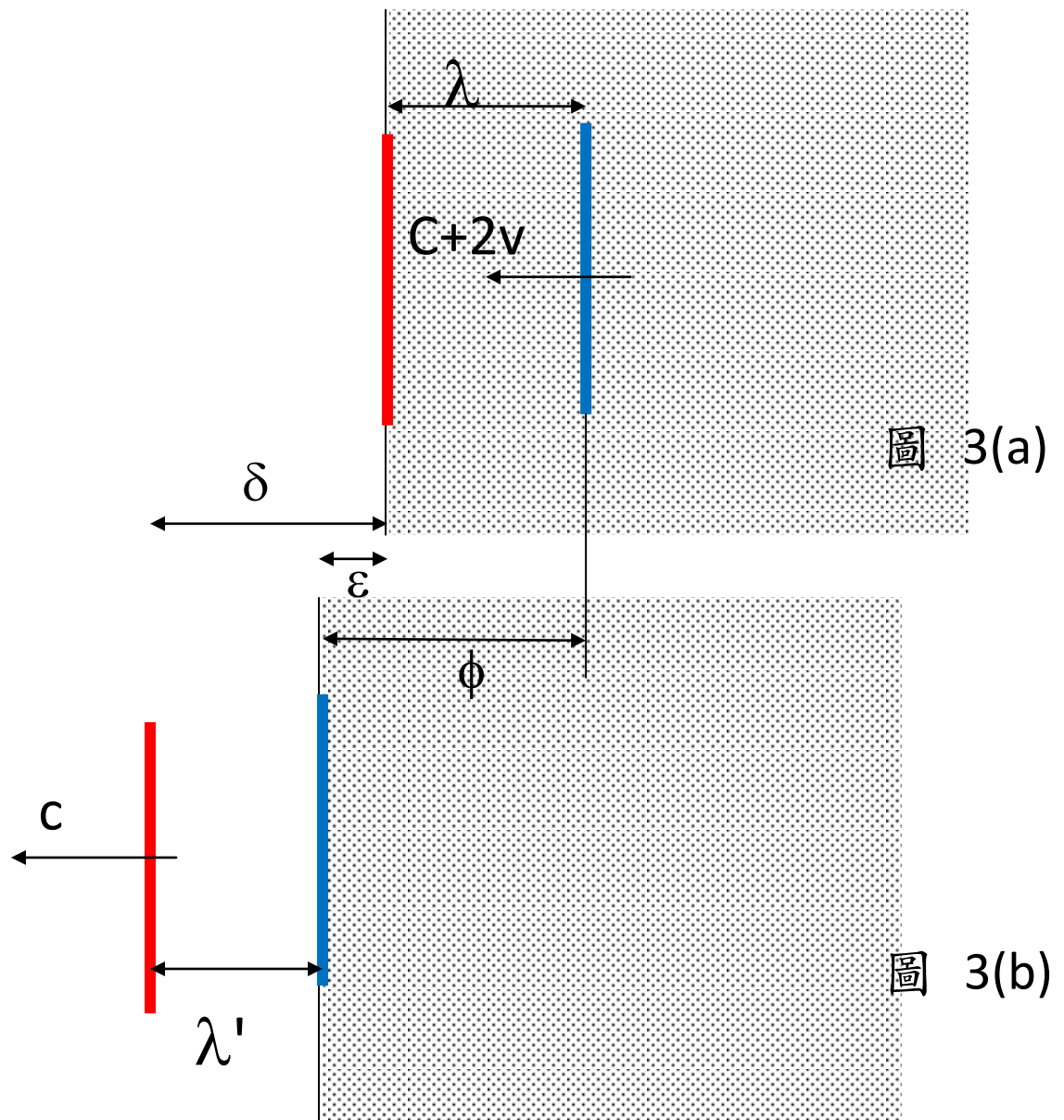


首先，我們先弄清楚在牆  $W$  內  $E'$  發出的波是如何的。



1.  $W$  內的波的波速是  $c+2v$ ，因為那裡的空氣有同方向速度  $2v$ 。
2.  $W$  內的波的波長是原波長  $\lambda$  (在某剎那，波源發出一波陣面，此波陣面以  $c+2v$  向左傳；在經歷一周期  $T$  後，這波陣面已行走了  $(c+2v)T$  距離。但在  $T$  時間內，波源亦行了同方向的  $2vT$  距離，換句話說，在那方向，時間相距  $T$  的兩個波陣面的距離相隔仍是  $cT$ ，即是原波長  $\lambda$ )。

牆內的波走出牆外，速度變回  $c$ 。



設圖 3(a) 至圖 3(b) 的時間為  $t$ 。

- 距離  $\delta$  是紅色波陣面用時間  $t$ ，以速度  $c$  行走的距離。所以  $\delta = ct$ 。(當波離開  $W$  進入左方範圍，波速變回  $c$ )
- 距離  $\epsilon$  是牆  $W$  用時間  $t$ ，以速度  $v$  行走的距離。所以  $\epsilon = vt$ 。

- 距離  $\phi$  是藍色波陣面用時間  $t$ ，以速度  $c+2v$  行走的距離。所以  $\phi = (c+2v)t$ 。

比較圖 3(a) 和圖 3(b) ，

$$\begin{cases} \phi - \varepsilon = \lambda \\ \delta - \varepsilon = \lambda' \end{cases}$$

即是

$$\begin{cases} (c+2v)t - vt = \lambda \\ ct - vt = \lambda' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct + vt = \lambda & \dots\dots\dots(5) \\ ct - vt = \lambda' & \dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

由 (5) 和 (6) 解到  $\lambda' = \frac{c-v}{c+v} \lambda$

再一次，我們求得反射聲音的頻率

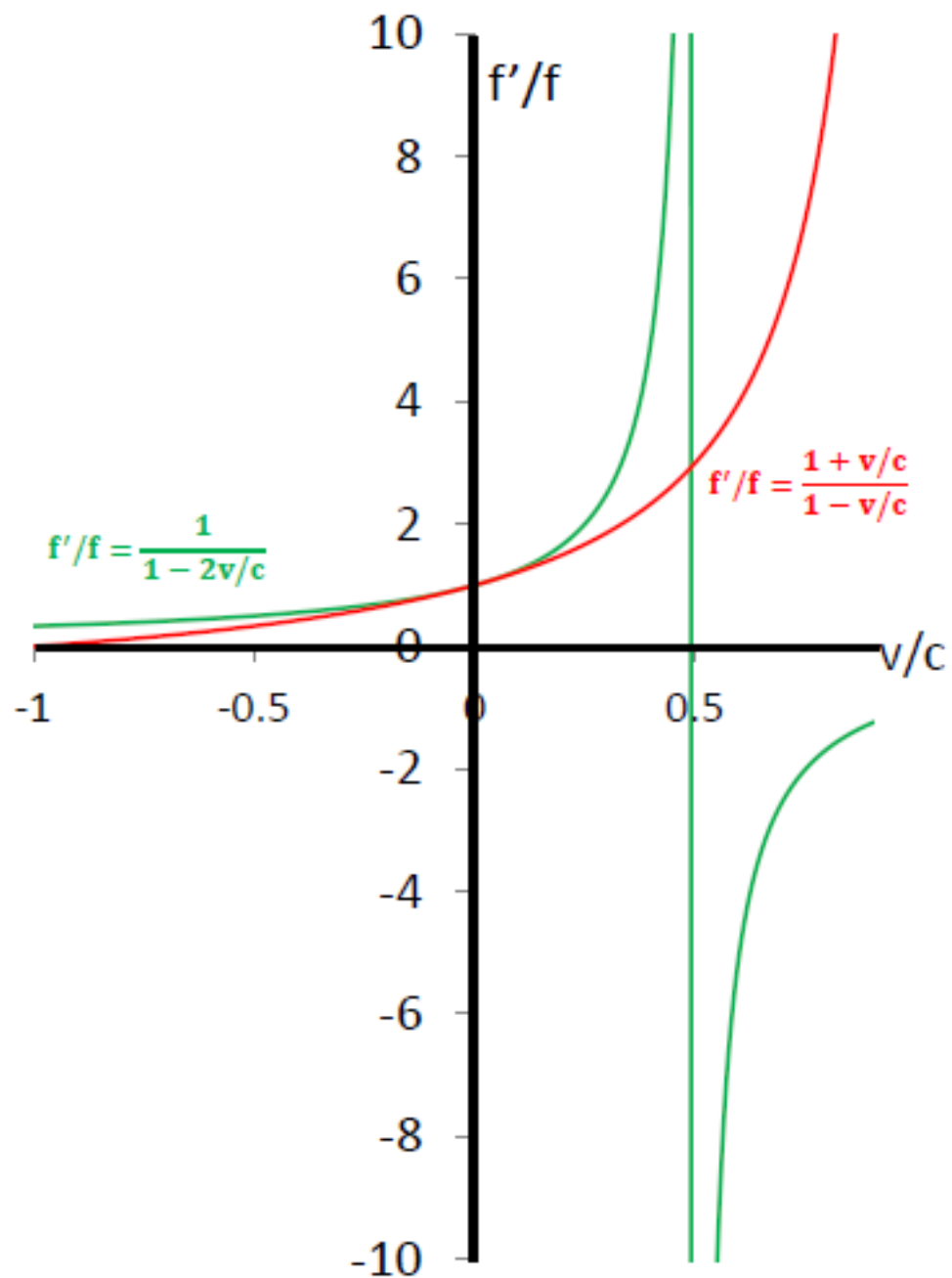
$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c+v}{c-v} f$$

這和以上兩方法求得的完全相同。

無疑，本問題的正確答案是

$$f' = \frac{c + v}{c - v} f$$

兩者的比較，請參看下圖



聲波速度  $c = 340 \text{ ms}^{-1}$ 。例如  $v = 50 \text{ ms}^{-1}$

正確答案 ( $f' = \frac{c+v}{c-v} f$ ) 得到  $f'/f = 1.36$

用錯誤公式 ( $f' = \frac{1}{c-2v} f$ ) 得到  $f'/f = 1.43$

錯誤百份比是 5%。

最後，須補充一點。如果不是聲波，而是電磁波 (electromagnetic wave)，那又會如何？

電磁波不需介質來傳播。電磁波有其 Doppler effect 公式。聲波 Doppler effect 公式嚴格來說不適用於電磁波。但在  $v \ll c$  的條件下，聲波公式用於 EM waves 也得到很好的答案。那時用  $f' = \frac{c+v}{c-v} f$  或  $f' = \frac{1}{c-2v} f$  均可 (見上頁圖，在  $v/c = 0$  的附近，兩組曲線重疊)。

吳老師 (Chiu-king Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

電郵：[feedbackWZ@phy.hk](mailto:feedbackWZ@phy.hk) 其中 WZ 是 23 之後的質數



Other Physics Applets