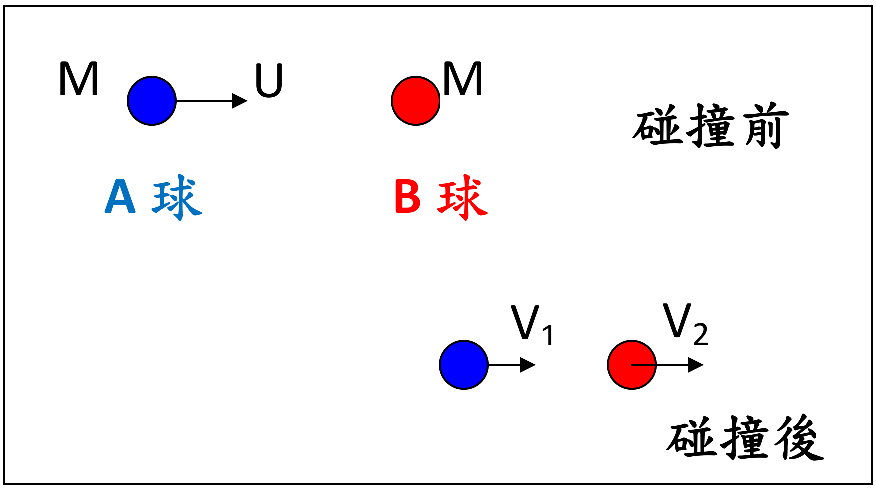
斜碰撞的直角

假設碰撞是

1. 被撞物件在碰撞前靜止。
2. 撞與被撞物件質量相同。
3. 碰撞為完全彈性，即沒有動能損失。

(I) 情況一：正碰撞 (head-on collision)



(a)憑直觀得結果：

兩球質量相同，碰撞中動量和動能須要守恆。

若發生

- 碰撞後，藍色停下來。
- 紅球以藍球的入射速度彈出。

即是

藍色的入射球的動量和動能完全傳給被撞的紅色球。

那時，動量和動能不就是守恆嗎？

(b) 用數學解方程組，印證 **(a)** 的想法

動量守恆 $MU = MV_1 + MV_2$ **(1)**

動能守恆 $\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}MV_1{}^2 + \frac{1}{2}MV_2{}^2$ **(2)**

簡化後，

式 **(1)** 變成 $U - V_1 = V_2$ **(3)**

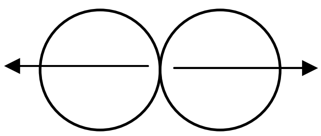
式 **(2)** 變成 $(U - V_1)(U + V_1) = V_2{}^2$ **(4)**

(4)÷**(3)**，得 $U + V_1 = V_2$ **(5)**

解聯立方程式 **(3)** 和式 **(5)**,

$$V_1 = 0, \quad V_2 = U$$

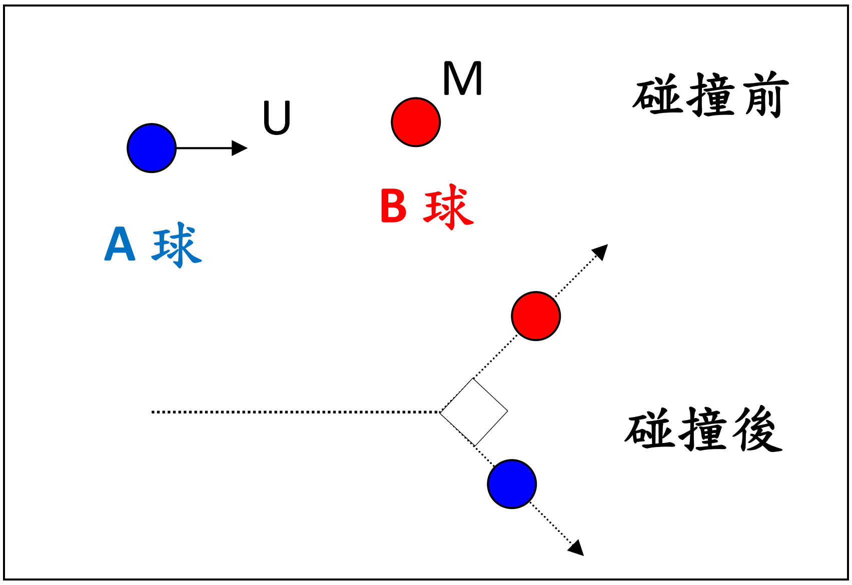
兩球互撞，它們施力對方。根據牛頓第三定律，此兩力的大小相同，方向相反。

B 施於 A 的力  **A 施於 B 的力**

根據力學定理，

力對物體作功 (work) = 物體動能改變 (change in KE) 。

(II) 斜碰撞 (oblique collision)



碰撞後，兩球彈出的方向必成直角。

動量守恆 $M\vec{U} = M\vec{V_1} + M\vec{V_2}$ (6)

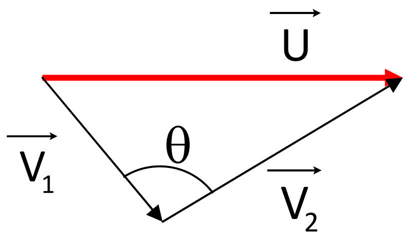
動能守恆 $\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$ (7)

式(6) 和式(7) 可簡化為

$$\vec{U} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \qquad (8)$$

$$U^2 = V_1^2 + V_2^2 \qquad (9)$$

如以圖表示 (8) ，

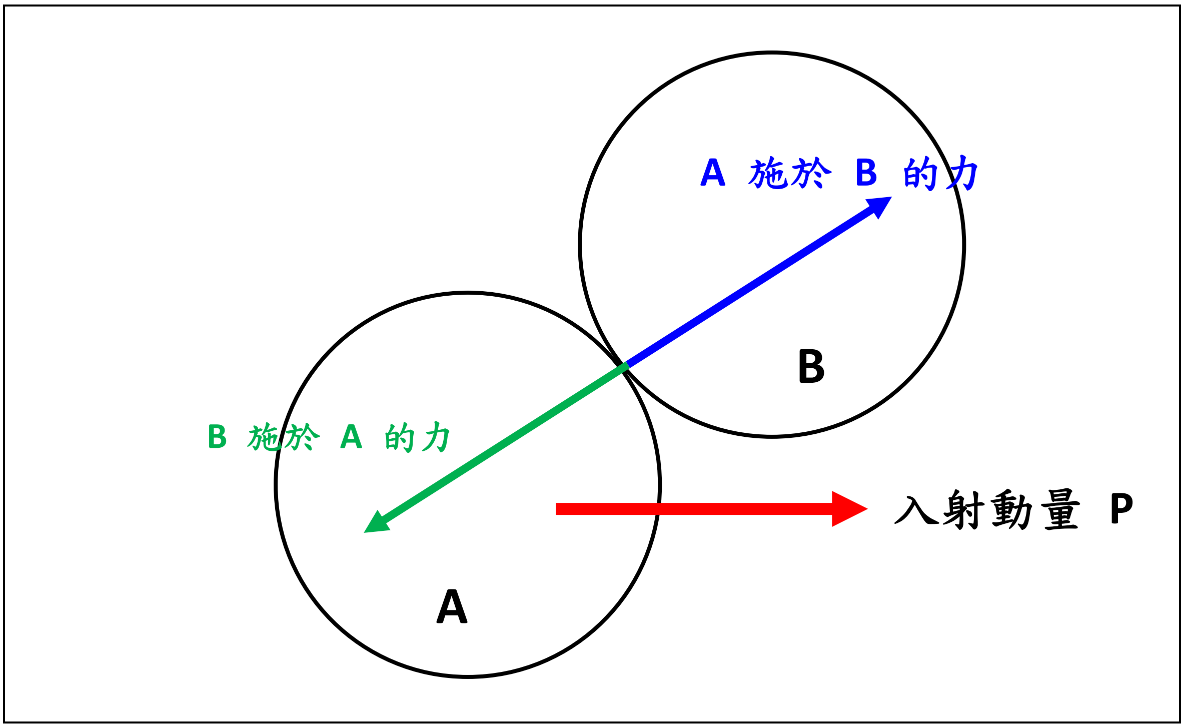


式(9) 的要求 ($U^2 = V_1^2 + V_2^2$) 就是上圖的θ必是直角 90^0(畢氏定理的逆定理) 。

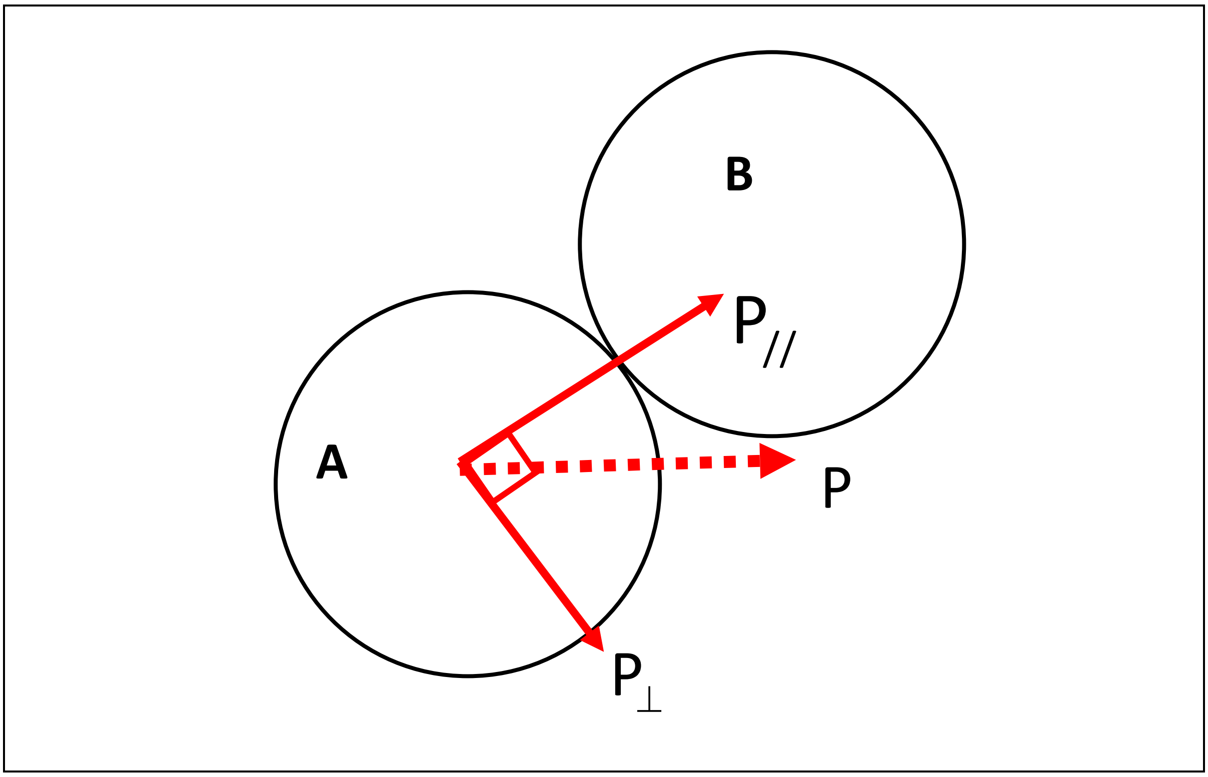
以上是標準的解釋說明。

本文補充一個常被疏忽觀點，就是斜碰撞的直角只不過正碰撞結果（入射球停下、被撞球彈出)的引伸。

兩球互撞時的作用力，



將 A 的入射動量 P 分解，一為平行該兩力的方向($P_{//}$)，另一為垂直力的方向（$P_{\perp}$）。



留心觀察上圖，它實則不過是 (I) 正碰撞的情況外再加上一個 $P_{\perp}$ 而已！

上面已說明，動能的交換是靠力作功。但這法向反作用力（假設所有面平滑，沒有摩擦力）是垂直於 $P_{\perp}$，所以無論如何，碰撞時的力改變不了 $P_{\perp}$。

$P_{//}$ 和 $P_{\perp}$是獨立的。

- $P_{//}$ 就像正碰撞時一樣，A 完完全全把它轉移給 B。
- A 自己只保留 $P_{\perp}$。

即是，最後，B 用 $P_{//}$ 彈出，A 則用 $P_{\perp}$ 彈出，這就是它們的方向必成直角的原因。

因為動能 $KE = \dfrac{P^2}{2M} = \dfrac{{P_{//}}^2}{2M} + \dfrac{{P_{\perp}}^2}{2M}$ ，上述的動量轉移後，動能也是守恆的。

吳老師 **(Chiu-king Ng)**

物理 非常一般