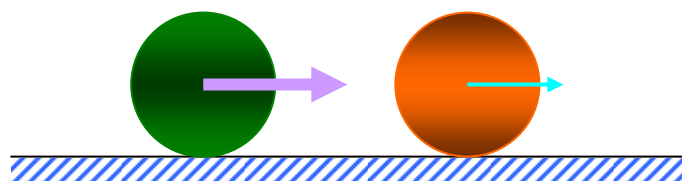


證明

動能在完全非彈性碰撞損失最大

兩物體進行正碰撞 (head on collision) :



1. 無論動能 (kinetic energy) 守恆否，
總動量 (momentum) 必守恆 (conserved)。

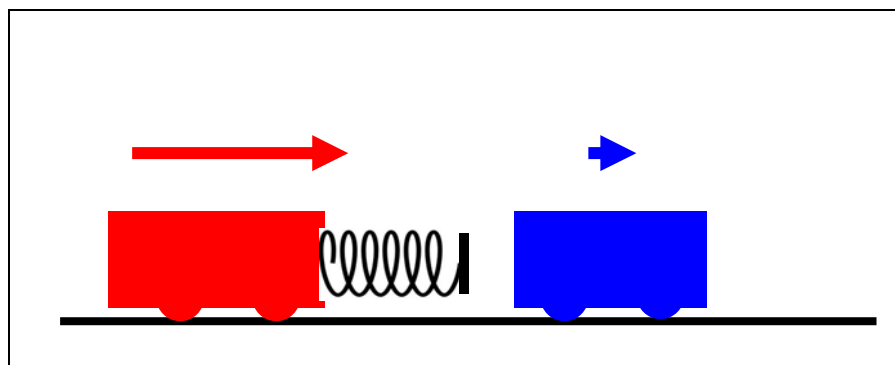
$$m_1v_1 + m_2v_2 = \text{常數 } C \quad \dots\dots\dots(1)$$

	總動能守恆	總動量守恆
彈性碰撞 (elastic collision)	是	是
非彈性碰撞 (inelastic collision)	否	是
完全非彈性碰撞 (completely inelastic collision)	否 (總動能損失最大)	是

* 「碰撞後黏在一起」的碰撞就是「完全非彈性碰撞」

2. 先以一個特例「證明」

想像兩小車相撞，它們之間安裝一個彈簧。



要發生碰撞，紅車必先要追及藍車。

兩車剛接觸時，紅車速度 $>$ 藍車速度，所以彈簧長度不斷壓縮。彈簧的勢能增加，即是兩小車的總動能不斷減少（總機械能守恆）。

紅車受到向後的力作用，所以紅車減速；藍車受向前的力作用，所以藍車加速。兩車的速度趨向相同。

若仍然是紅車速度 $>$ 藍車速度，那彈簧的長度仍繼續減少（彈性勢能增加）。即是兩車的動能仍繼續減少。

紅車繼續減速，藍車繼續加速，最後必然是

紅車速度 = 藍車速度，

然後再變成紅車速度 < 藍車速度。

在轉為 紅車速度 < 藍車速度後，彈簧長度增加，即是彈簧
勢能減少，小車的總動能不斷增加。

即是說，在紅車速度 = 藍車速度 之時，
彈簧長度最短。那時，彈性勢能最大，
兩小車的總動能必是最小。

3. 數學直接證明：

$$\text{兩物體總動能} \quad E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2) ，消去 v_2 ，

$$2E_k = m_1v_1^2 + m_2\left(\frac{C - m_1v_1}{m_2}\right)^2$$

整理後，得

$$2E_k = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)v_1^2 - 2C\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_1 + \frac{C^2}{m_2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

我們知道當 $x = -\frac{b}{2a}$ ，二次函數 $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的值
最小。

從 (3) ，得當 $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ ， E_k 最小。

代 $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ 入 (1)，亦得 $v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ 。

即在動量守恆的條件下(式(1))，當兩物體碰撞後有共同速度(例如碰撞

後黏在一起) $v_1 = v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ ，其總動能損失最大。

這種「碰撞後黏在一起」的碰撞稱之為「完全非彈性碰撞」，即是「非彈性碰撞」中最「極端」(以動能損失而言)的情況。

吳老師 (Chiu-king Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數



Online Physics Applets