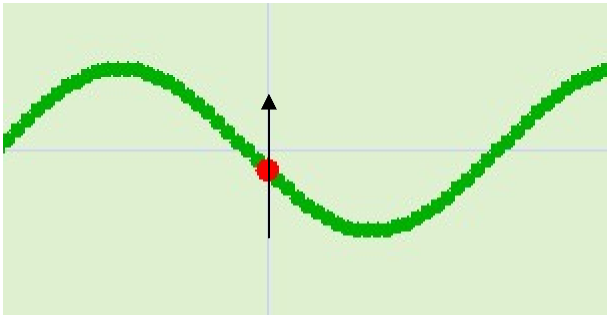
波 動 與 簡 諧

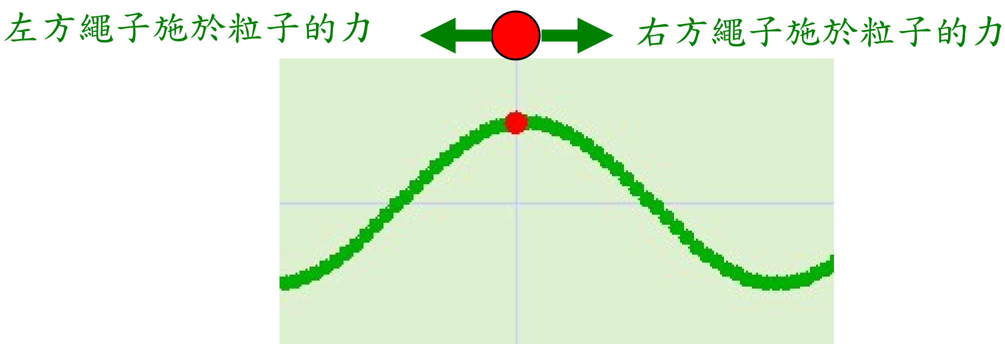
粒子進行簡諧運動(SHM），當位移最大時，粒子所受的淨力的量值(magnitude) 也應該最大。



上圖是抖動一根繩子所造成的橫波。

橫行波上的粒子會隨波動而作簡諧運動。粒子從那裡得到簡諧運動所需的力？答案是繩子的張力，不是重量（試想在沒有重量情況下，仍然可產生繩上的橫波）。 奇怪是，當粒子處於波峰或波谷，它左、右兩邊的繩子都是水平，即是作用於粒子的張力抵消了。

淨力是零，那又何來SHM所要求的一個指向平衡點的最大回復力 (restoring force)？？



沒有淨力，又可以像SHM般有最大的加速？？

問 題 的 關 鍵 是 簡 諧 運 動 的 定 義。

嚴格在說，

簡 諧 運 動 的 定 義 是 $a \propto -x$，不是 $F \propto -x$。

因為 $a \propto -x$，那才求得 x 的通解，$x = A\cos(\omega t + \phi)$。

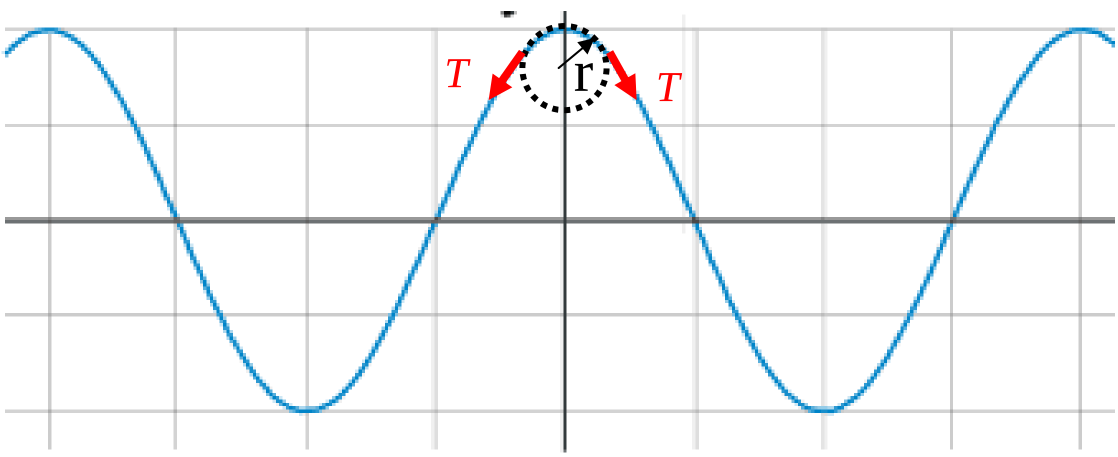
一般情況，$a \propto -x$ 和 $F \propto -x$ 是同義的。但在這問題，就有分別。

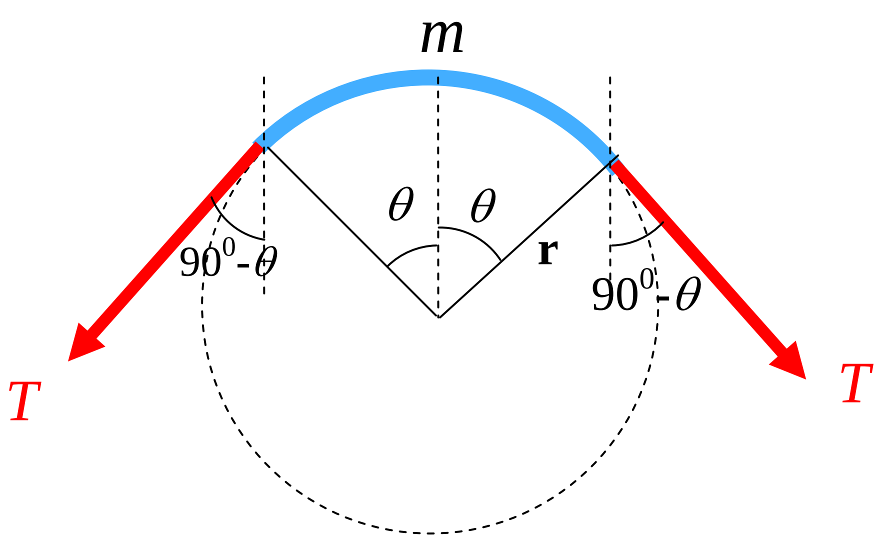
波峰上的粒子，它左、右的張力的確抵消， 但 該 粒 子 的 質 量 也 是 零。

$a = F/m$。零除零，答案不一定是零！也不一定是一個小值！

正確的分析是先設粒子有一定大小，那時左、右方的張力就不會完全水平。把 F/m 的 $m \to 0$，就可求得粒子的加速。

設波峰上那一小段的曲率半徑為 r， T 為繩子的張力。m 為繩子在波峰那一小段的質量。





T 的水平分量互相抵消；T 的垂直分量造成施於 m 的淨力，

$$F = 2T\cos(90^0 - \theta) = 2T\sin\theta。$$

m 的質量是 $\rho r(2\theta)$，其中 ρ 是繩子的每單位長度的質量。

m 的加速 $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{2T\sin\theta}{2\rho r\theta} = \dfrac{T}{\rho r}\dfrac{\sin\theta}{\theta}$

若 $\theta \to 0$，$F \to 0$ 及 $m \to 0$。但 a 不是趨向零。

因為 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$，所以 $\theta \to 0$，$a \to \dfrac{T}{\rho r}$。

即是波峰上粒子所受的力是零，但加速度 $a = \dfrac{T}{\rho r}$ (向下)

- $\because$ 波速 $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ $\quad\therefore a = \dfrac{v^2}{r}$
- 曲線的曲率半徑數學公式

$$\frac{1}{r} = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$$

(參考. e.g. https://www.math24.net/curvature-radius/)

若設 $y = A\cos(kx-\omega t)$，

$\because$ $y' = -kA\sin(kx-\omega t)$ 和 $y'' = -k^2 A\cos(kx-\omega t)$

在波峰， $\sin(kx-\omega t)=0$ ， $\cos(kx-\omega t)=1$

$\therefore$ 在波峰 $\dfrac{1}{r} = k^2 A$

$\therefore$ 在波峰 $a = \dfrac{v^2}{r} = (kv)^2 A = \omega^2 A$ (方向指向平衡)

當粒子進行 SHM ，在 $a = A$ ，$a = -\omega^2 A$ 。

- 簡 諧 運 動 的 定 義 是 $a \propto -x$，不是 $F \propto -x$
- 波峰上那粒子受的淨力是零， 但又可加速！ 不要奇怪，因為粒子無限小，它的質量也是零！

吳老師 (Chiu-king Ng)

https://ngsir.netfirms.com

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數