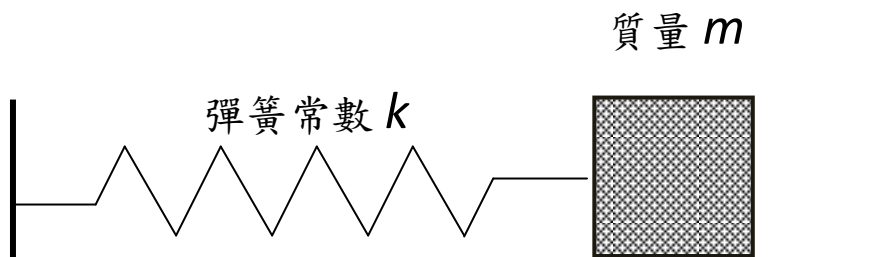


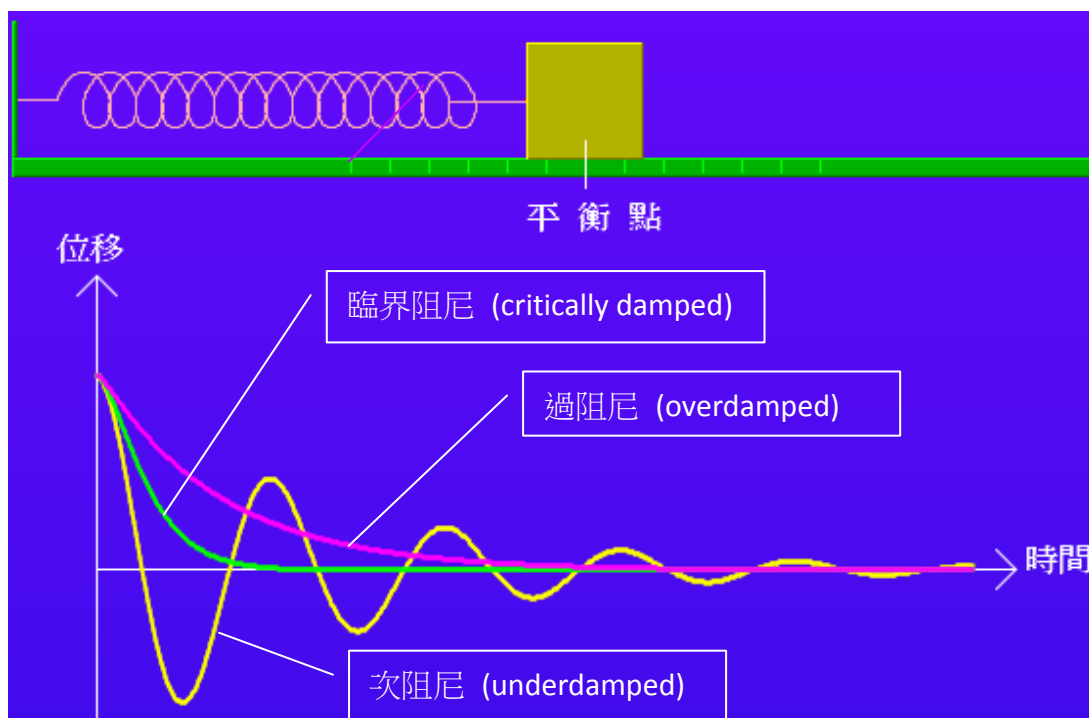
臨界阻尼和過阻尼諧振子可以過衝平衡點嗎？

可以，只要在開始時給予一量值足夠大的向內初速。

有關阻尼振動的基本物理：

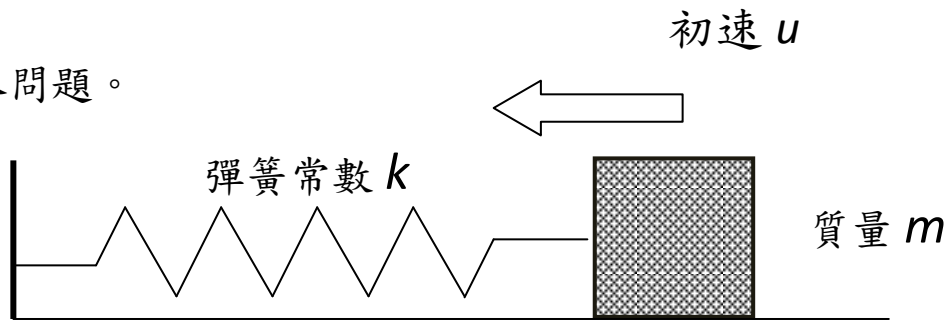


- 阻尼 (damping) 正比於速度 $-bv$ ，其中 b 稱為阻尼系數(常數)。
 b 越大，阻尼的大小越大。
- 當發生臨界阻尼振動 ($b = \sqrt{4km}$) 或過阻尼振動 ($b > \sqrt{4km}$)，諧振子不會產生「真實」振動。當從靜止釋放，諧振子先作短暫加速。之後減速，速度迅速減少，最後緩慢地走向平衡點。當到達平衡點時，速度為零。所以它們不會過衝 (overshoot) 平衡點。



<http://phy.hk/wiki/chinesehtm/Damped.htm>

返回本問題。



現在 m 在 $x=A$ 處釋放，但有向著平衡點的初速 u 。

阻尼系數滿足 $b \geq \sqrt{4km}$ 。

考慮由 $x=A$ 至平衡點 $x=0$ 的路途。

$$\text{初動能} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$\text{初彈性勢能} = \frac{1}{2}kA^2$$

阻尼耗去能量(克服阻尼力作的功) = $b\bar{v}A$ ，其中 \bar{v} 是由 A 至 0 之間的(空間)平均速度。

若 m 能過衝平衡點，那到達平衡點時， m 必須仍擁有動能。

即是

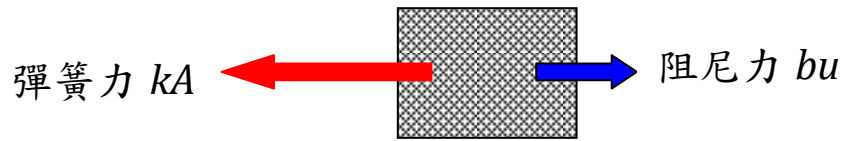
$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kA^2 - b\bar{v}A > 0 \quad \dots\dots\dots(I)$$

上式 (I) 是能夠發生過衝的條件。

平均速度 \bar{v} 等於甚麼？

m 以初速 u 衝向平衡點，可能出現兩種情況：

(i) 如果 $kA > bu$



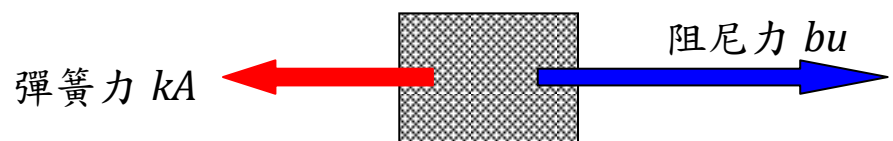
因為淨力與速度同向，所以 m 會加速。

隨著 m 的速度增加，阻尼力增加。

同時， m 會越接近平衡點，彈簧力減少。

到達了某一點後， 阻尼力就會超越彈簧力， m 變成減速。之後就一路減速了（見 (ii) 的討論）。

(ii) 如果 $kA < bu$



開始時， 阻尼力已大於彈簧力， m 已進行減速。

當 m 的速度減少，阻尼力減少； 但同時， m 會越接近平衡點，彈簧力也減少。 兩者同步減少，有可能由 "彈簧力 $<$ 阻尼力" 變成 "彈簧力 $>$ 阻尼力"， 即是由減速變成加速嗎？

不可能！由 "彈簧力 $<$ 阻尼力" 變回 "彈簧力 $>$ 阻尼力"， 必先要過渡 "彈簧力 $=$ 阻尼力"。

就算真的出現 "彈簧力 $=$ 阻尼力"， m 當時的淨

力為零， m 會以勻速走向平衡點。阻尼力不變（因為勻速），但彈簧力繼續減少（ m 接近了平衡點一些），所以又變回 "彈簧力 < 阻尼力" 了。

所以，開始了減速，之後就一路減速了。

在情況 (i)， m 以 u 開始，先加速，後減速。在 A 至 O 這段路中，平均速 \bar{v} 有可能是大於 u 。

如果初速 u 足夠大，情況 (ii) 就會發生。這情況是 m 由 u 開始並一路減速。所以肯定說，平均速 \bar{v} 必定比初速 u 小。

初速 u 足夠大， $u > \bar{v}$

 (*)

把條件 (I) 的 \bar{v} 改為 u ，寫成條件 (II)

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kA^2 - b\bar{v}A > 0 \quad \text{.....(I)}$$

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kA^2 - buA > 0 \quad \text{.....(II)}$$

(I) 和 (II) 的 m, k, A 和 b 均視為不變，問題是如果 u 足夠大，(I) 是否可以成立？

答案是「總可以」，因為

(1) 足夠大的初速 u 可令條件 (II) 成立，因為

首項 " $\frac{1}{2}mu^2$ " 是 u 的二次方，而 " buA " 只是 u 的一次方。其他量 m, k, A 和 b 視為不變，當 u 大於某值，條件 (II) 成立。

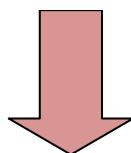
(2) 如果初速 u 足夠大，條件 (*) 也可成立，即是 $u > \bar{v}$

所以當初速 u 大到條件 (II) 和條件 (*) 均成立時，

條件 (I) 當必成立。

(α) 當 u 足夠大	$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kA^2 - buA > 0$	因為 " $\frac{1}{2}mu^2$ " 是 u 的二次方，而 " buA " 只是 u 的一次方
(β) 當 u 足夠大	$u > \bar{v}$	因為「一路減速」，初速 u 已是 A 至 O 之間的取大值了。

當 u 大到 (α) 和 (β) 均成立



$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kA^2 - b\bar{v}A > 0$$

到達平衡點時， m 仍擁有動能，即是發生

過衝 (overshoot)

我們用了一個「不解方程」的方法來證明無論 b 有多大（是臨界阻尼或過阻尼），當 m 有足夠大的初速衝向平衡點， m 總可以去了平衡點的另一邊。

問題一：可以發生兩次過衝嗎？

問題二：如果初速 u 不是向內（向著平衡點），而是向外，有可能發生過衝嗎？

吳老師 (Chiu-king Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數



Other Physics Applets