

同學問：「公式 $v = \lambda f$ 不就是表示了『波速 v 正比於頻率 f 』嗎？」

中學數學：

若 $x \propto y$ ，則 $x = ky$ ，其中 k 為非零常數。

反過來說，

$p = qr$ 不表示 $p \propto q$ ，除非 r 是非零常數。

所以說，

- ◆ $v = f\lambda$ 表示了「 v 正比於 f 」是錯誤的，因為 λ 並不是常數。
- ◆ 反之， v 、 f 和 λ 三者中 v 有時候是常數，有時候不是。若 v 真是常數，那可以說「 λ 反比於頻率 f 」。
- ◆ 但波速 v 是常數或不是常數，這要從有關的物理才可得知，斷不可以從 " $v = f\lambda$ " 知道。

甚麼波動的波速 v 是常數？甚麼波動的波速 v 與頻率有關？讀者可否舉一些例子？

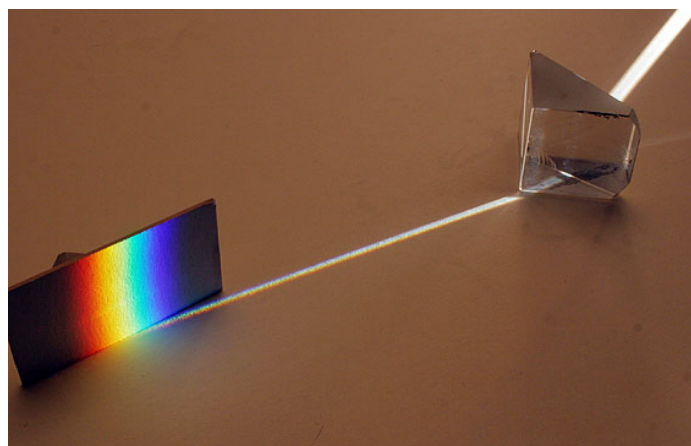
Case 1: 波速 v 是常數 (與頻率無關)

- 例子：電磁波在真空傳播

聲波在空氣傳播 (只是近似是這樣)

Case 2: 波速 v 與頻率有關 (但絕不是正比或反比那麼簡單)

- 最著名的例子是光經過玻璃或水的色散(dispersion)現象。



在玻璃，紅光 (低頻) 比紫光 (高頻) 行得稍快一些。

波速 v 與甚麼有關或無關，是不能從 " $v = f\lambda$ " 知道。這是要從有關的物理才可得知。

公式 " $v = f\lambda$ " 只是告訴我們 v 、 f 與 λ 三者的數學關係，但不能告訴我們它們之間的因果關係。

對初學者而言，它們之間的因果關係簡化來說是這樣：

- **頻率 f 純粹決定於發射器。** 水波槽的振動器振得越快，水波越高頻；揚聲器的振動膜振動越快，產生的聲音越高頻。甚麼顏色光源發出甚麼顏色(頻率)光。(多普勒效應 Doppler effect：波源的速度也會決定發出的波的頻率。著名例子是“紅移”現象)。

波動從發射器發射後，頻率 f 就不會改變。頻率是一個波的“身份編碼”，無論之後發生反射、折射、衍射、干涉，... 或甚麼現象，波的頻率不會發生改變。

- **波速 v 決定於傳播介質及有可能也與頻率有關。**
 - ➔ 聲音在空氣，液體，或固體不同介質的傳播速度有別。
 - ➔ 光在真空，水，或玻璃不同介質的傳播速度有別。

- 不同顏色 (頻率) 光在玻璃或水的速度也不同。
 - 水波槽的水波波速與水深有關；深水海洋的水波波速與水深無關，但與水波的頻率(波長)有關。
 - 行走中的觀察者會看到不一樣的波速 (如車上乘客看街上行人)，這令觀察者接收到的波頻率有別於波的本有頻率 (多普勒效應)。
- 知道了波速 v 及頻率 f 之後，波長 λ 由 $\lambda = \frac{v}{f}$ 決定。



附加討論：

1. 電阻功率可以寫為

$$P = I^2 R \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

$$\text{但亦可寫為 } P = \frac{V^2}{R} \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

式 (1.1) 說 $P \propto R$ ，但式 (1.2) 又說 $P \propto \frac{1}{R}$ ，為甚麼這麼矛盾？

2. 向心加速

$$a = \omega^2 r \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\text{但亦可寫為 } a = \frac{v^2}{r} \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

式 (2.1) 說 $a \propto r$ ，但式 (2.2) 又說 $a \propto \frac{1}{r}$ ，為甚麼這麼矛盾？

又是那一句，若 $x = yz$ ，只有當 y 是常數時， x 才可以說與 z 正比。

- $P = I^2 R \Rightarrow P \propto R$ ，這個要電流 I 是常數時才成立。譬如

電阻在串聯 (in series) 時， I 就是常數，那時的确 $P \propto R$ 。

- $P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P \propto \frac{1}{R}$ ，這個要電壓 V 是常數時才成立。譬如電

阻在並聯 (in parallel) 時， V 就是常數，那時就是 $P \propto \frac{1}{R}$ 。

- $a = \omega^2 r \Rightarrow a \propto r$ ，這個要大家的角速度 ω 相同時才成立

譬如放在同一個轉盤上不同位置的物體，大家的 ω 相同，
向心加速正比於曲率半徑 r 。

- $a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a \propto \frac{1}{r}$ ，這個要大家的線速率 v 相同時才成立。

譬如一輛車以相同車速 v 轉不同的彎，向心加速反比於曲
率半徑 r 。



練習：

1. 已知水波槽水波的波速 v 與水深 h 的關係是

$$v = \sqrt{gh} \quad , \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

其中 g 是引力加速度。若果水波槽的水深減半，問頻率、波長和波速如何改變？

2. 式(1.1)只適用於淺水區(淺水區水深也可以有變化)，但何謂之「淺水」？

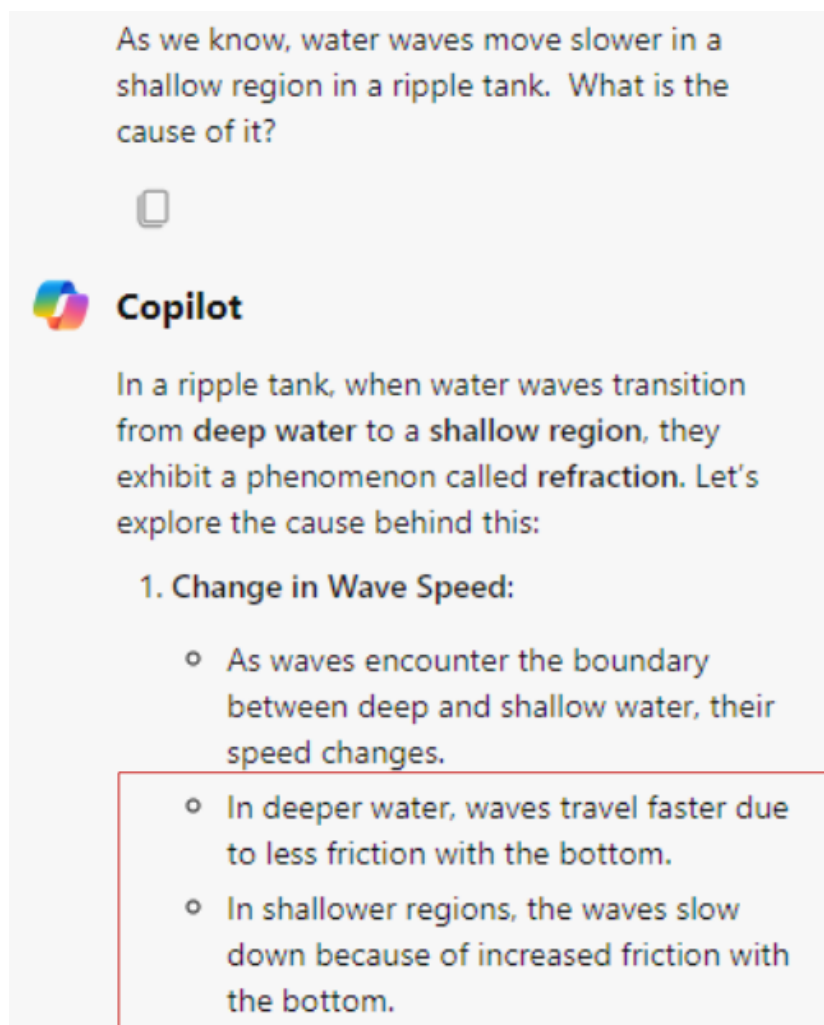
這並不是以人的標準來說的，而是相對水波的波長。換言之，當 $h \ll \lambda$ ，式(1.1) 就會大概成立。

請同學在網上搜尋海嘯(tsunami)中海浪波的典型波長是多少？如果與一般海洋的水深比較，上述條件是否滿足？

有關的一則新聞 <https://www.ettoday.net/news/20220117/2170680.htm>



筆者向 Microsoft 的 AI Copilot 問了以下問題：As we know, water waves move slower in a shallow region in a ripple tank. What is the cause of it? 它的回答是



淺水區水波行慢了是因為水波與水底的摩擦增大 (因為與水底較接近) 了！？[這說法簡直是胡說八道](#)。

1. 公式 (1.1) 是假設了水是 non-viscous (沒有摩擦) 而推導出來，所以公式中沒有 viscosity 這一參數。亦即是在

假設水是 non-viscous (frictionless) 之下已表現出「淺水區域的水深影響着波速」這一特性來。

2. 水波在淺水區相比在深水區是行得慢一些，但不是水波在淺水區會越行越慢啊！若果水波行慢了真是因為水波與水底的摩擦增大，那當水波在淺水區這「增大的摩擦」就會一直繼續影響着它，結果就是把水波變得越來越慢（減速）了。

3. 水波在淺水區從深水進入淺水，波速慢了；但從淺水區返回深水區時，波速變快了，這又如何可從「水底摩擦」得到解釋？無論摩擦的數值如何，它總不能把波推快啫？！

*** * * * * *

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數