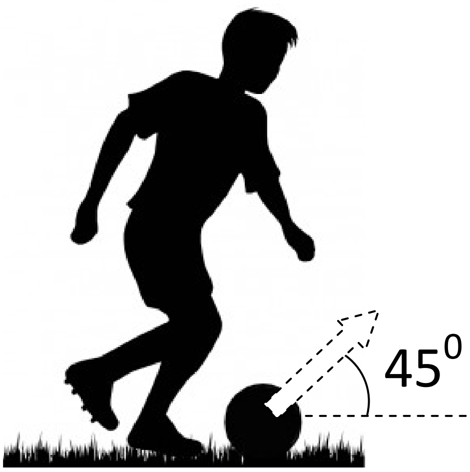
我們經常聽到這樣說：

把物件向空中拋出，當拋射角度是 $45^0$，其射程最遠。

事實是，只當人躺臥在地上拋射（由地面向空中發射，落回地面）。以上說法才成立。



# 設

發射初速 $\vec{u}$，

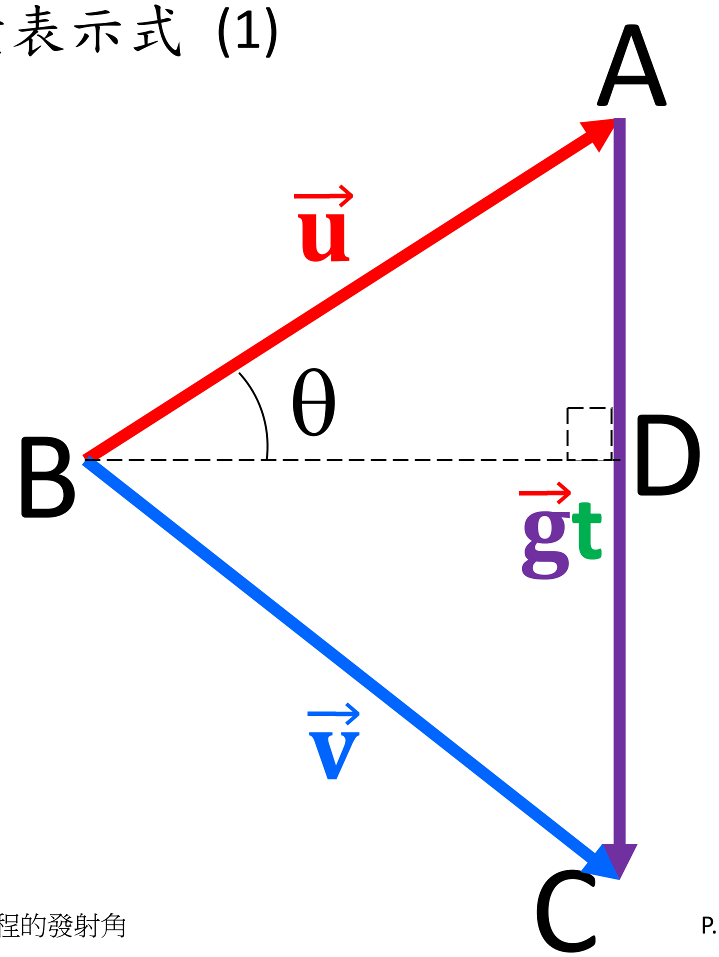
發射方向與水平成角度 $\theta$，

物件落地時速度 $\vec{v}$ 和全程時間 $t$。

在空中，物件只受向下的引力加速 $g$ 所影響，所以

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{g}t \qquad .......(1)$$

用矢量表示式 (1)



$\Delta$ ABC 的面積 =

$\frac{1}{2}(AC)(BD) = \frac{1}{2}(u\cos\theta)(gt)$ …(2)

$u\cos\theta$，即是初速 $\vec{u}$ 的水平量值，$u\cos\theta = u_x$

所以，

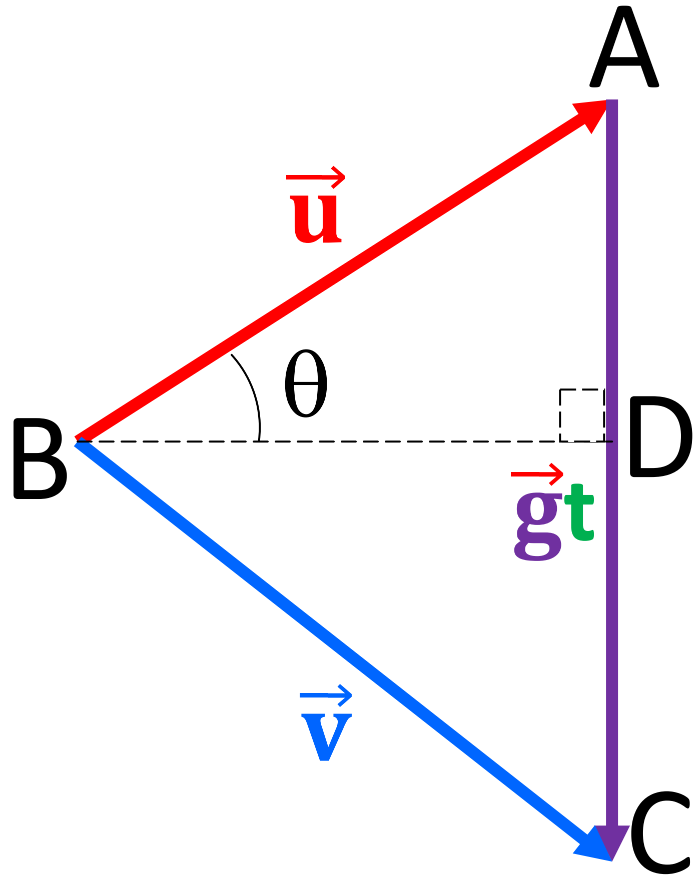
$\Delta$ ABC 的面積 = $\frac{1}{2}g(u\cos\theta)(t)$ = $\frac{1}{2}g(u_x t)$

其中 $u_x t$ 就是射程 R。

**$\therefore \Delta$ ABC 的面積 = $\frac{1}{2}gR$**

g 是常數，當 $\Delta$ ABC 有最大的面積，射程 R 就會最大。

把上面的三角形再顯示：




(1) 發射初速的**量值** (magnitude) u 是固定的（本問題就是在固定的 u 之下用甚麼角度射程最遠）。

(2) 落地時速度的量值 v 也是固定的。根據**能量守恆**，在某一高度射向另一高度，無論路徑如何，到達時速度的量值總是一樣。

$\Delta$ABC 的面積的另一計法是

$$\frac{1}{2}(AB)(BC)\sin\angle ABC = \frac{1}{2}u\,v\,\sin\angle ABC$$

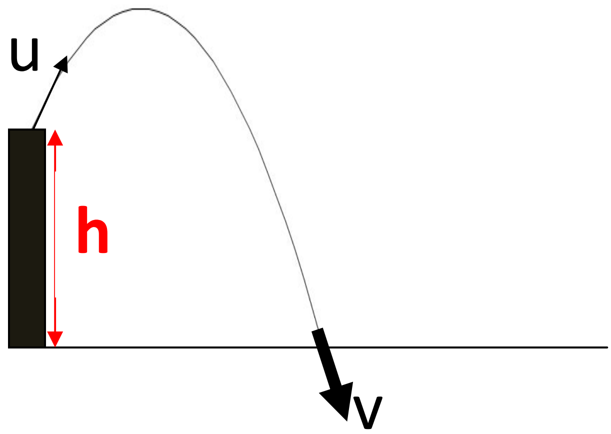
u　和 v 是固定值，所以要求 $\Delta$ABC 有最大面積(最遠射程)，即是要求 $\angle ABC$ 是 $90^0$。

**當落地時速度垂直於發射初速，其射程為最遠。**

當 $\angle ABC = 90^0$，$\angle ACB = \theta$，$\tan\theta = \frac{u}{v}$

根據能量守恆，$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mu^2+mgh$

$v=\sqrt{u^2+2gh}$




**結果：出現最遠射程的發射角度是**

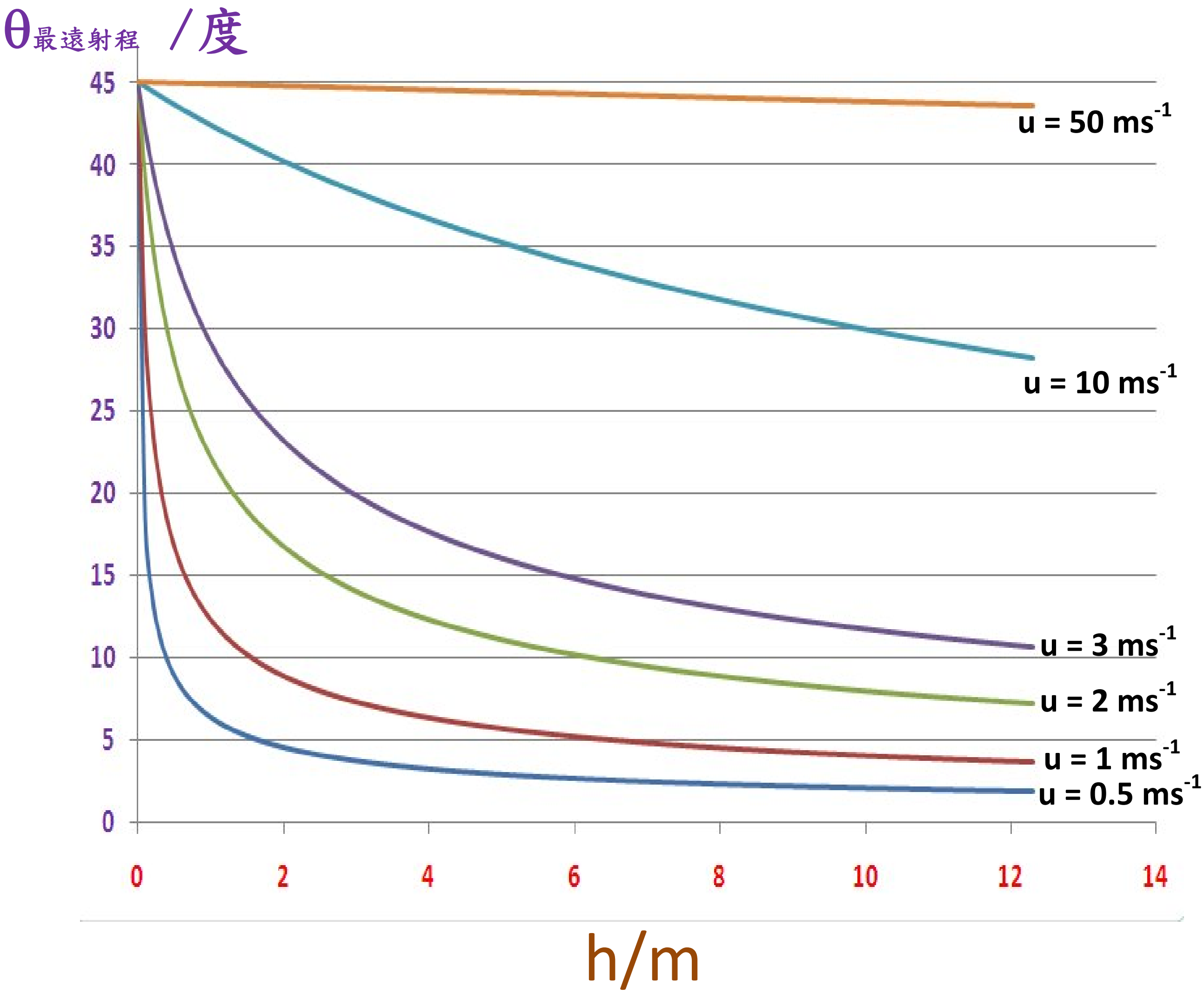
$$\theta_{最遠射程}=\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2gh}}\right)，$$

**最遠射程是**

$$R_{最遠}=\frac{1}{g}uv=\frac{1}{g}u\sqrt{u^2+2gh}$$

根據上式，$\theta_{最遠射程}$不是固定，而是由 u 和 h 去決定。

## 在不同 u 和不同 h 之下的 $\theta_{最遠射程}$ ：




- 除非 h = 0，否則 $\theta_{最遠射程}$ 都是小於 $45^0$。
- 當初速 u 很大（$u^2 >> 2gh$），$\theta_{最遠射程}$只是略小於 $45^0$ 。
- 初速 u 越慢，$\theta_{最遠射程}$ 就越低於 $45^0$。

- 舉例，如把東西向外拋出，h = 1.2 m，，
  u = 4ms$^{-1}$，那時 $\theta_{最遠射程} = 32^0$。

- 因為 $R_{最遠} = \frac{1}{g}u\sqrt{u^2+2gh}$，所以就算大家都是以$\theta_{最遠射程}$發射，h 越高，$R_{最遠}$就越遠。

例：

➢ u = 4 ms$^{-1}$

地射向地，$\theta_{最遠射程} = 45^0$，$R_{最遠} = 1.6$m

➢ u = 4 ms$^{-1}$

h = 1.2m，以$\theta_{最遠射程} = 32^0$ 拋射出，

$R_{最遠} = 2.5$m

拋鉛球運動，是適合大力( u 大)，也要身高 (h 大) 的人 (當然也要懂得計$\theta_{最遠射程}$！)。

- **我們可以把公式**

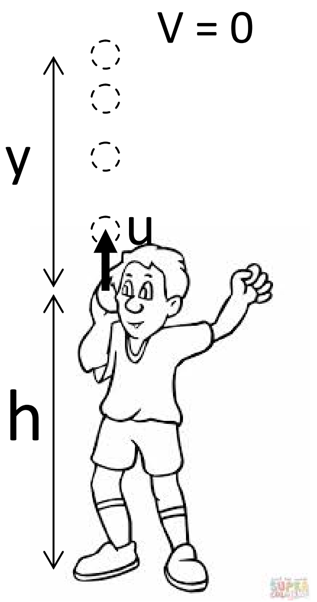
$$\boldsymbol{\theta}_{\text{最遠射程}} = \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 2gh}}\right)$$

**寫成**

$$\boxed{\boldsymbol{\theta}_{\text{最遠射程}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^{-1}}}\right)}$$

**λ 是甚麼？**

**λ 是把物體以 u 垂直發射 時可以升高的最大(離手)高度與身高的比例。**



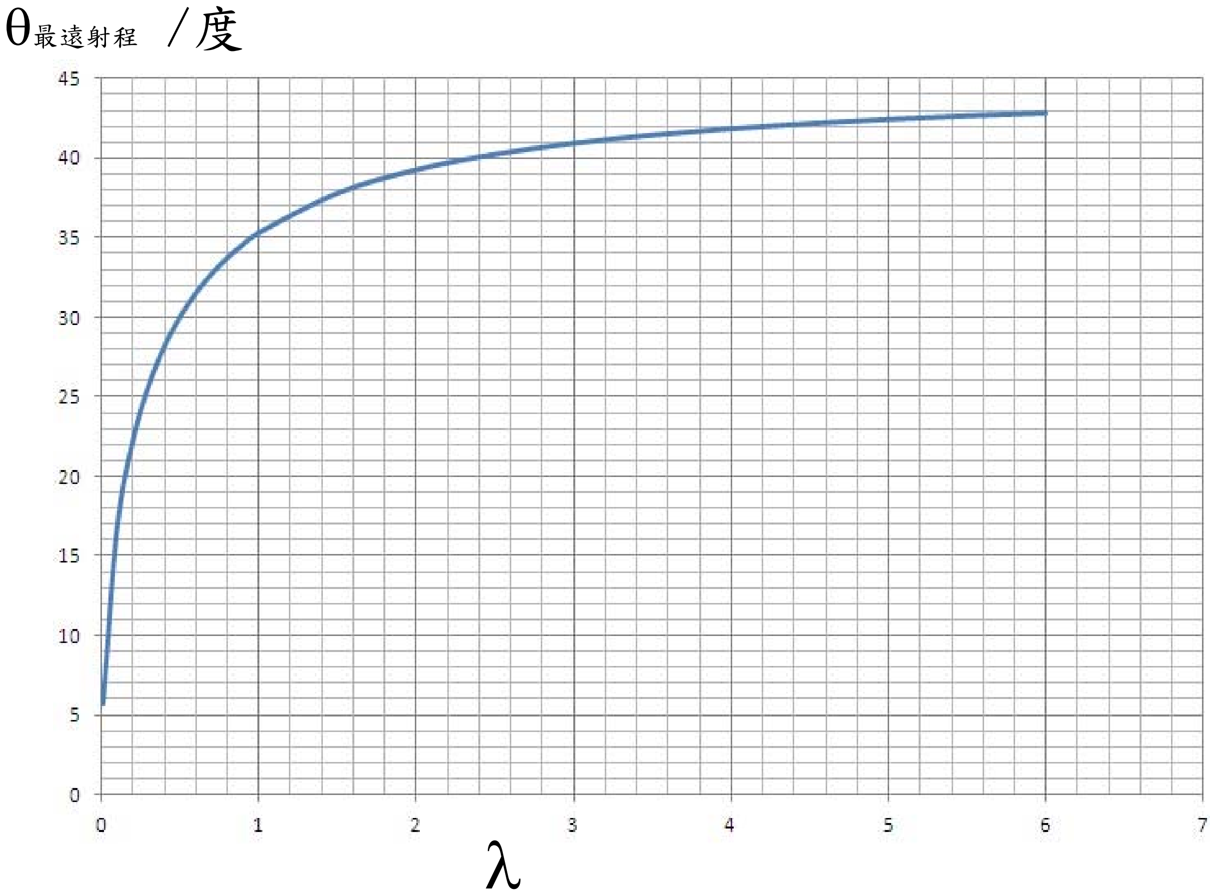

∵ $v^2 = u^2 - 2gy$ (g 和 y 均是正)

最高點， $v = 0$。

$y = u^2/2g$

$$\boxed{\lambda = y/h}$$

下圖是$\theta_{最遠射程}$ 隨$\lambda$的改變。




在擲鉛球運動，運動員在比賽前可先把鉛球以比賽時相同的氣力把鉛球垂直向上推出(小心，不要鉛球跌下時弄傷自己)，看看它可以升至多高 y (是離手，不是離地)。從比例 $\lambda = y/$身高，就可以知道鉛球在比賽時應該以甚麼角度扔出。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 |
| $\theta_{最遠射程}$ | $30^{o}$ | $35^{o}$ | $38^{o}$ | $39^{o}$ | $40^{o}$ |

最後，請大家玩玩我寫的「拋物體」Java 小程式。

http://ngsir.netfirms.com/chinesehtm/ThrowABall.htm

也可參考以下 YouTube 影片

http://www.youtube.com/watch?v=r9NRImTEzTk

## 參考


- 本文用以求最大射程的方法源自 W.M.Young, Am. J. Phys. 53, 1(1985)
- Shot Put Projection Angle http://people.brunel.ac.uk/~spstnpl/BiomechanicsAthletics/ShotPut.htm#Introduction



# 吳老師 (Chiu-king Ng)

OnlinePhysicsApplets