把一條質量均勻分佈的繩子兩邊固定。它中間部份下墜形成一曲線。

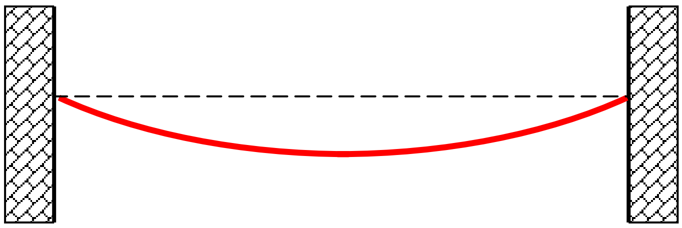


圖 (i)

(a) 為甚麼繩上的張力會隨位置而改變？

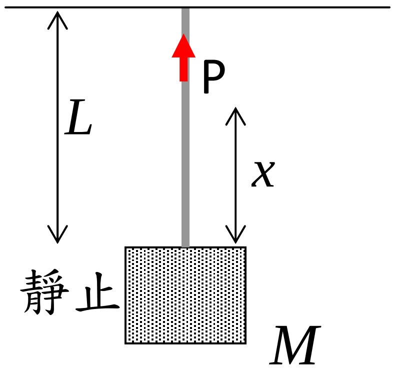
(b) 為甚麼繩上每一點的張力的水平分量都是固定不改？

(c) 繩 子 下 墜 會 形 成 一 條 拋 物 線 嗎？

(d) 詳細推導繩子下墜的數學方程。

(a) 因為繩有重量，所以繩上的張力會隨位置而改變。

以下的簡單例子有助明白



若繩沒有質量，繩上任何點的張力= Mg

現繩的質量為 m。

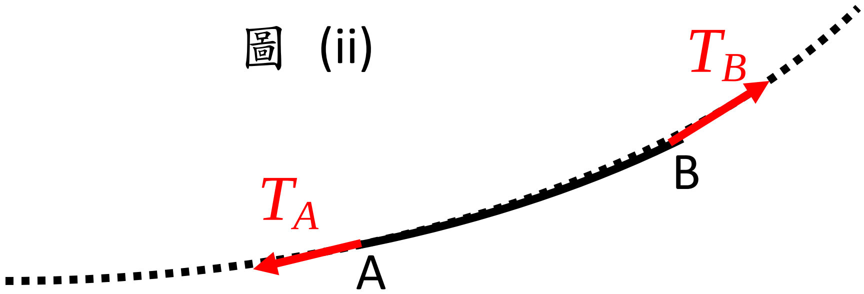
明顯的，在 P 點的張力 =P 以下的總重量

$$= Mg + mg(x/L)$$

圖 (i) 的繩是彎曲的，但道理相若。

(b) 繩上張力隨位置改變，但張力的水平分量不變。因為每一段繩所受的外力只是這一段繩的重量 。考慮以下 AB 的一截繩：

圖 (ii)



明顯的，AB 段的繩所受的力互相平衡抵消。

水平分量：$T_{Bx} - T_{Ax} = 0$ ...(1)

垂直分量：$T_{By} - T_{Ay} = m_{AB}g$ ...(2)

其中 m_{AB} 是 AB 段的質量。

因為 (1) ，加上 A、 B 是繩上隨意選取的兩點，所以繩上張力的水平分量為一常數。

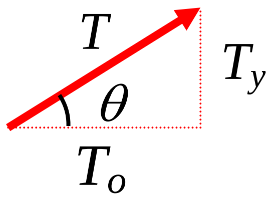
（c） 求繩形成的曲線。

設在圖(ii)， A 點的座標為 (x, y) ，

B 點的座標為 (x+ Δx, y + Δy)

上頁的式(2) $T_{By} - T_{Ay} = m_{AB} g$

設 T_0 為每點的張力水平分量。所以任何點的張力垂直分量 T_y = $T_0 \tan\theta$，其中 θ 是該點繩與水平的夾角。$\tan\theta$ 亦即是曲線在該點的微分 dy/dx。



所以，

$$T_{By} = T_o \frac{dy}{dx}\Big|_{x+\Delta x} \quad ...(3)$$

$$T_{Ay} = T_o \frac{dy}{dx}\Big|_{x} \quad ...(4)$$

如 A、B 兩點接近，AB 段繩的長度

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \quad ... (5)$$

所以，AB 段繩的重量

$$m_{AB} = \frac{\Delta s}{L} mg \quad ... (6)$$

其中 L 的繩的總長度，m 是它的總質量。

將 (3) ，(4) ，(5) 和 (6) 代入 (2) ，得

$$T_o[\frac{dy}{dx}|_{x+\Delta x} - \frac{dy}{dx}|_x] = \frac{(\Delta x)mg}{L}\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$$ 或

$$L\frac{T_o}{mg}[\frac{\frac{dy}{dx}|_{x+\Delta x} - \frac{dy}{dx}|_x}{\Delta x}] = \sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \quad \text{... (7)}$$

取極限 $\Delta x \to 0$（即 B → A）

(7) 變成

$$\boxed{b\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}$$

...(8)

其中常數 $b = L\frac{T_o}{mg}$ 。 ...(9)

(8) 就是我們要找尋的微分方程。從 (8) 解出 y，就求出曲線的方程。

解 (8) 的方法很簡單，連 做 兩 次 積 分 便 可。

設 $dy/dx = u$，

由 (8) 得 $$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{b}\int dx$$

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})+C=\frac{x}{b} \qquad \text{...(10)}$$

設當 $x=0$，曲線在最低點。

所以 $u=0$。求得積分常數 $C=0$。

由 (10) ，得

$$u=\frac{e^{x/b}-e^{-x/b}}{2}\text{，即 }\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x/b}-e^{-x/b}}{2} \qquad \text{...(11)}$$

把 (11) 積分，最後求得答案

$$y=\frac{b(e^{x/b}+e^{-x/b})}{2}+C' \qquad \text{...(12)}$$

為求簡單，選擇積分常數 $C'=0$ (不同 C' 只是曲線上下移動)

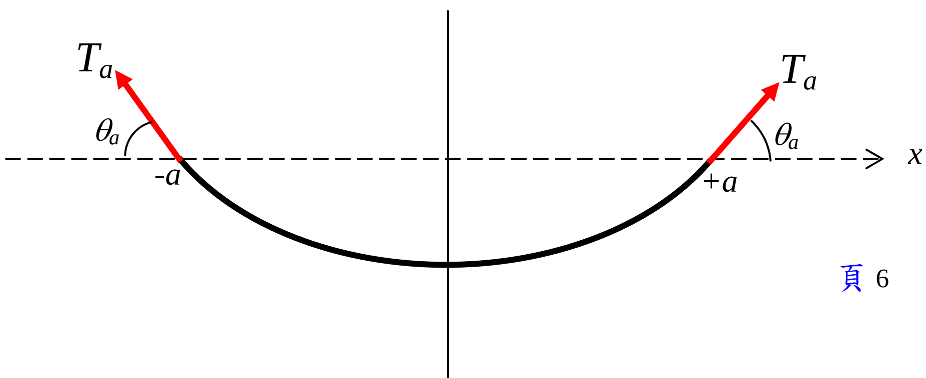
這就是當兩端固定，繩子下墜形成的曲線方程。

曲線不是拋物線，而是「雙曲餘弦」函數 (hyperbolic cosine，數學符號： *cosh*)。 這曲線又稱之為「懸鏈線」 (catenary)。

（註：$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ ，$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$）

決定常數 b

式(9) $b=L\dfrac{T_o}{mg}$ ，其中 L 是繩長，T_o是張力水平分量和 m 是繩的質量。 我們設繩的左右兩個懸掛點為 $x=\pm a$, 及在該兩處的張力為 T_a。



T_a 的水平分量是 T_o， 所以

$$T_a \cos\theta_a = T_o \qquad \text{...(13)}$$

左右兩個 T_a 的垂直分量支撐繩的總重量，所以

$$2T_a \sin\theta_a = mg \qquad \text{...(14)}$$

(14) ÷ (13), 得

$$\tan\theta_a = mg/(2T_o)$$

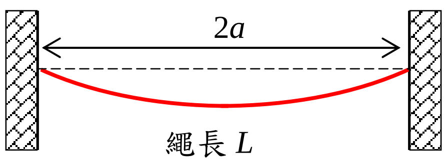
因為 $b = L\dfrac{T_o}{mg}$ ，所以 $\tan\theta_a = L/(2b)$。

另外，$\tan\theta_a$ 即是曲線在 $x = a$ 的 dy/dx 。利用式(11)， 最後我們得

$$e^{a/b} - e^{-a/b} = \frac{L}{b} \qquad \text{...(15)}$$

這是求 b 要解的方程。此類方程稱為超越方程(transcendental equation)，需要用數值方法 (numerical method) 來解。

總結結果:



曲線方程 $$y = \frac{b(e^{x/b} + e^{-x/b})}{2}, \qquad ...(\alpha)$$

其中 b 可滿足條件 $$e^{a/b} - e^{-a/b} = \frac{L}{b} \qquad ...(\beta)$$

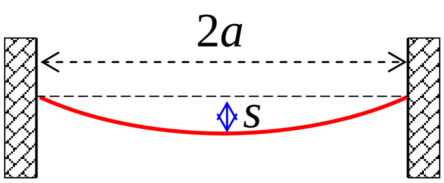
- 曲線只與繩長 L 和 a 有關 (2a 為掛點距離 –工程學稱此為跨度 span)。正確來說，曲線形狀只與 L 和 a 的比有關。

- 假設了繩的質量均勻。此外，曲線與繩的質量 m 無關，也與 g 無關。
- 曲線中間下墜的幅度稱為弛度（sag）s

$s = y(a) - y(0)$

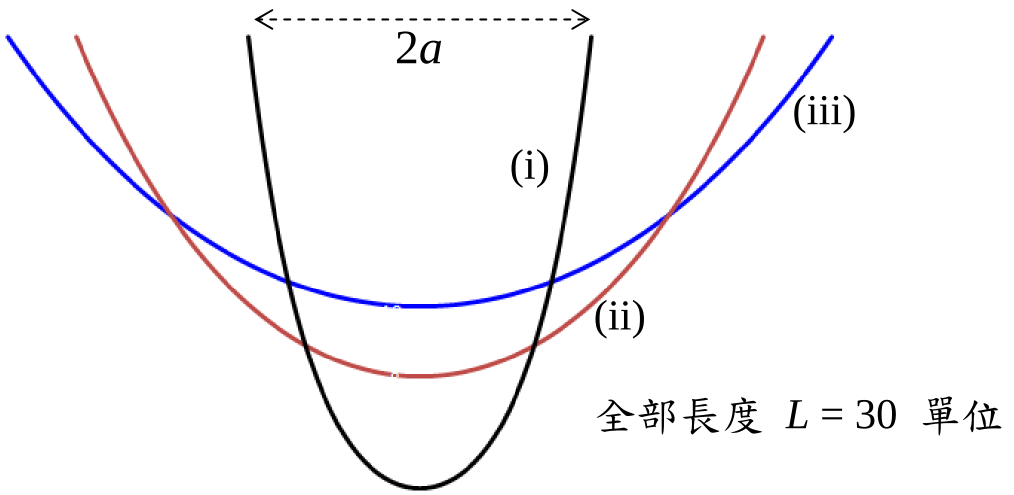
$$\boxed{s = \frac{b(e^{a/b} + e^{-a/b})}{2} - b} \qquad \ldots \quad (\gamma)$$

若知道跨度 $2a$ 和弛度 s，可利用式(γ) 求 b。



例 1:

	L/單位	a/單位	b /單位 （解式(β)）
(i)	30	12	10.146
(ii)	30	10	6.165
(iii)	30	5	1.762



例 2:

由網上下載以下圖片。

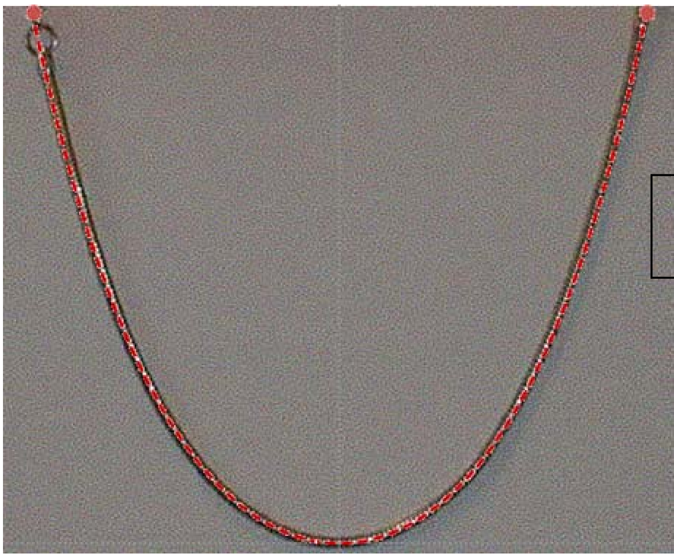
http://www.egyptorigins.org/catenarycurve.htm

量度圖片及計算得到

量 度*			解 方 程
L/單位	a/單位	s/單位	b/單位
32	7.5	12.8	3.28 (用 L 和 a，式(β)) 3.31 (用 a 和 s，式(γ))

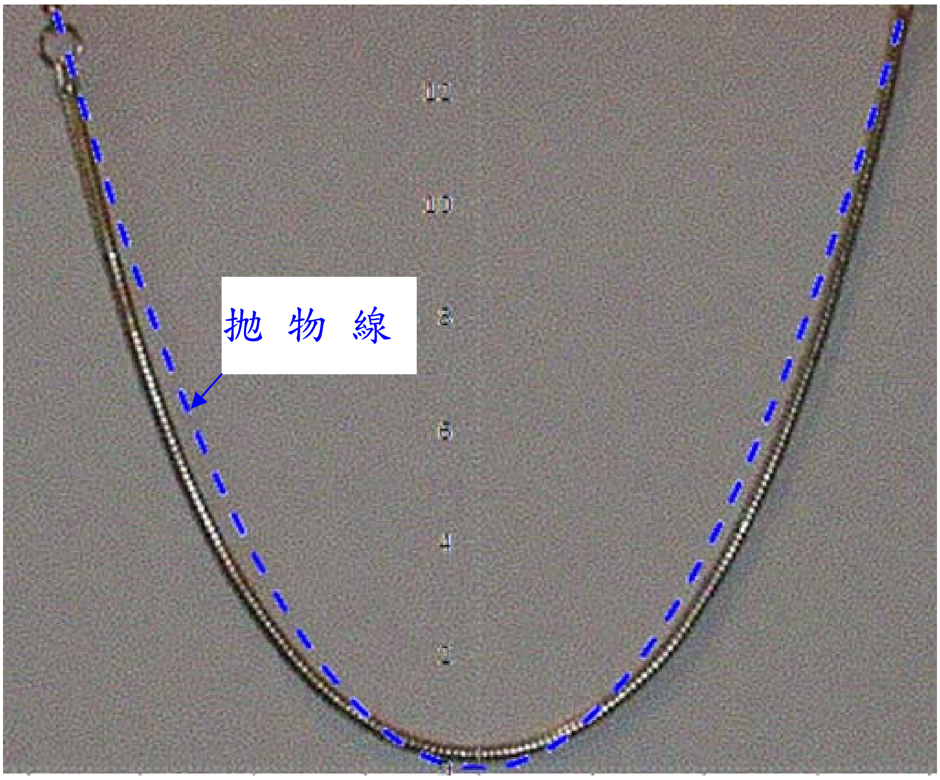
* 圖片可放大縮小，故量度數值大可不同，但數字的比應相若。

從式(α)，繪畫出理論曲線 (用 $b = 3.3$)。把理論曲線(下圖紅色虛線)畫在原圖上，發覺 非 常 吻 合。



$b = 3.3$

但畫上相同長度和跨度的拋物線，發覺與長鏈下墜曲線相當不吻合。



家 中 實 驗：

下圖中綠、紅和藍三線長度相同。紅、藍二線以式(α)繪畫。

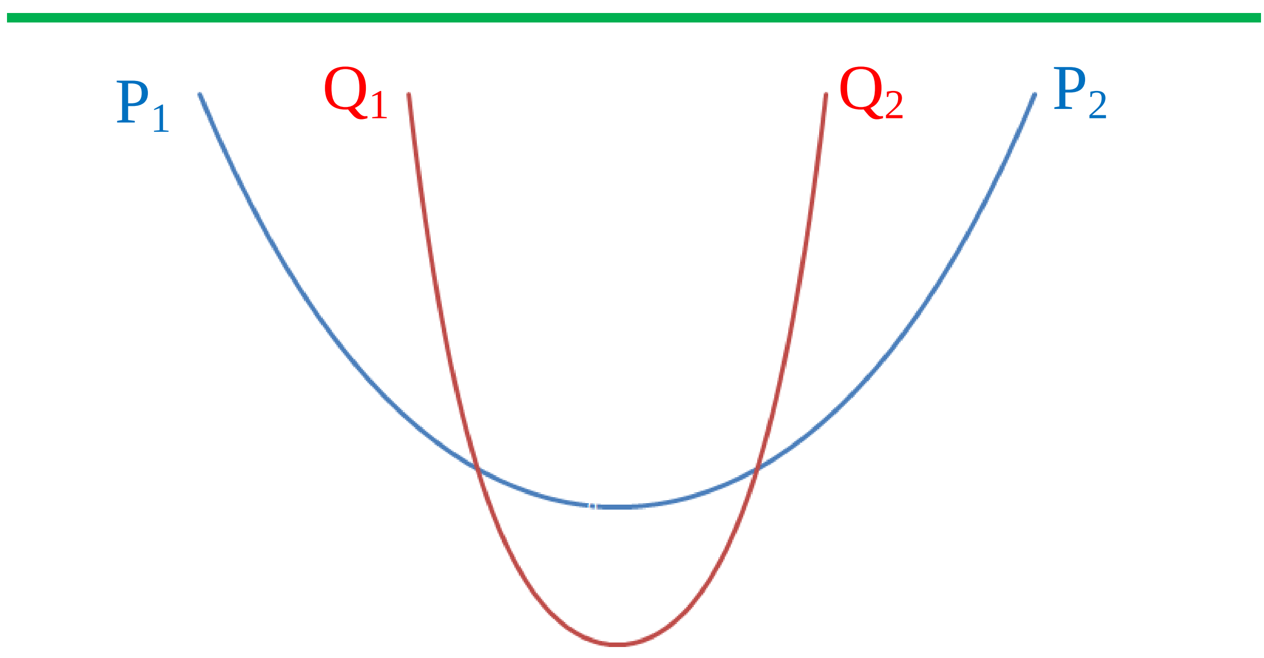
1。請預備一條柔軟的幼 金 屬 鏈（不能用繩、線、膠帶等，因這些物體的形狀難以順平）。

2。取金屬鏈與綠線長度相同的一截（用記號記上就可以）

3。調校電腦顯示器的熒屏(screen) 與地面垂直。

4。把那一截金屬鏈的兩端放在 P_1 和 P_2 ，小心觀看金屬鏈下墜的曲線是否與圖中的藍線重疊。

5。把兩端放在 Q_1 和 Q_2， 觀看結果。



吳老師 (Chiu-king Ng)

https://ngsir.netfirms.com
http://phy.hk

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數