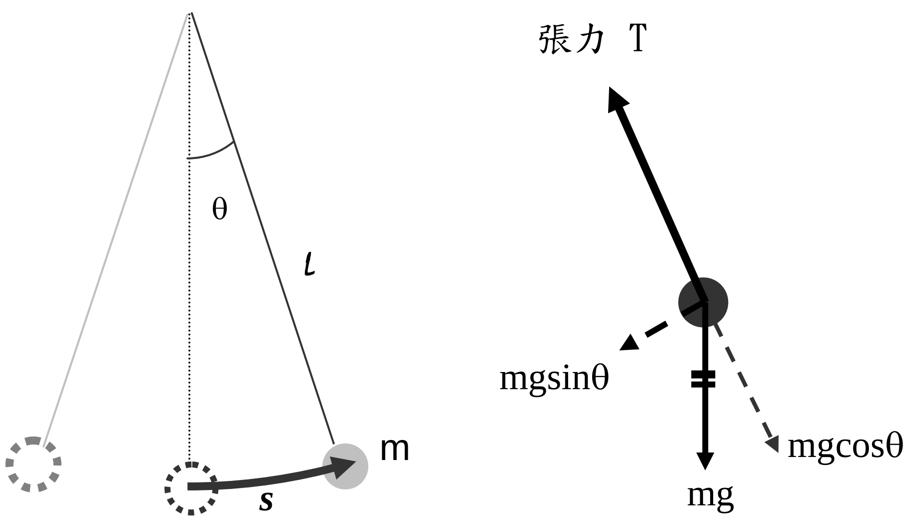
單擺是簡諧的兩個證明

高中同學都知道單擺 (simple pendulum) 在小振幅下屬於簡諧運動(simple harmonic motion) 。本文比較它的兩個證明。

證明一



向心淨力用於圓周運動，所以 $T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{r}$

擺錘沿弧 s 擺動，切向（tangential）淨力是 mgsinθ，指向平衡點。

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

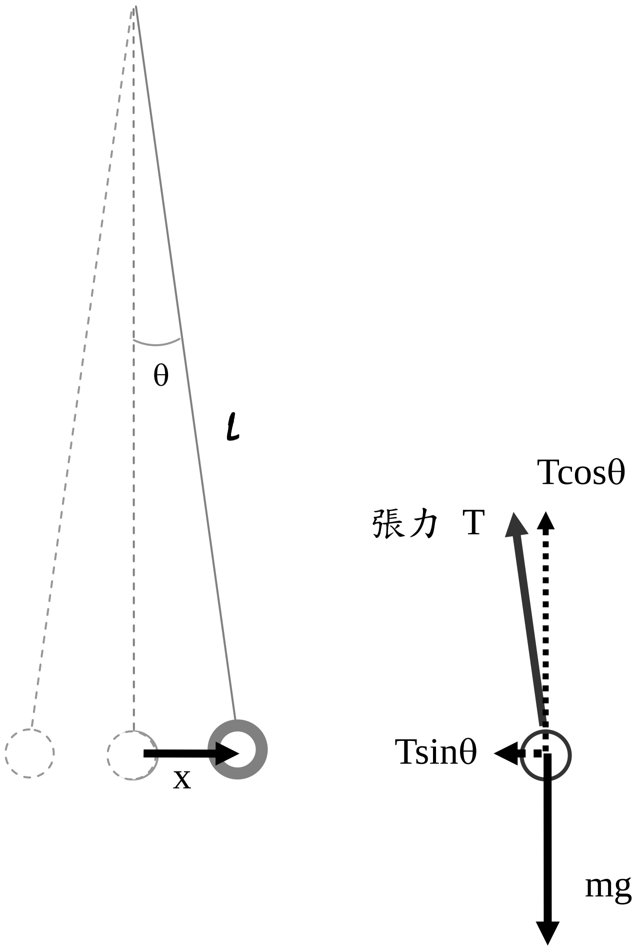
若 θ 細小， $\sin\theta \approx \theta = \dfrac{s}{\ell}$ …………(2)

利用（2），(1）變成 $-\dfrac{g}{\ell}s = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ ………… (3)

式（3）証明擺錘在小振幅下沿弧 s 擺動是簡諧運動，其角頻率是 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ 。

以上証明常見於中學書本。

證明二：



擺錘在垂直方向沒有運動，所以垂直方向沒有淨力：

$$T\cos\theta = mg \quad \text{.........}(4)$$

擺錘在水平方的淨力是 Tsinθ，方向是指向中間平衡點。

$$-T\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{.........}(5)$$

$(5)\div(4)$，得 $$-T\tan\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \text{............}(6)$$

若 θ 細小， $$\tan\theta \approx \theta = \frac{s}{l} \quad \text{...............}(7)$$

利用（7），(6) 變成 $-\frac{g}{\ell}x=\frac{d^2x}{dt^2}$ ………… (8)

式 (8) 証明擺錘在小振幅下沿水平擺動是簡諧運動，其角頻率是 $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$。

兩證明之比較：

	證明一	證明二
平衡點	中間最低位置	中間最低位置
沿甚麼方向擺動	以繩的懸掛點為中心的弧	水平方向
沿甚麼方向的力平衡	沒有	垂直方向
張力與重量關係	$T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{r}$ 在最高點，$T=mg\cos\theta$	任何時刻， $T\cos\theta=mg$
有沒有作圓周運動	有	沒有
作甚麼假設	$\sin\theta\approx\theta$	y 方向沒有淨力和 $\tan\theta\approx\theta$

- 「證明一」較常見，看似是標準方法。
- 同學較容易受落「證明一」，因為同學都會同意小錘的擺動其實是以懸掛點為中心的非匀速圓周運動。
- 香港某教科書寫「證明二」不正確，是 "wrong concept”。

「證明二」是否真是 wrong concept？

首先，我們要弄清楚一個 concept。

很多時候，物理學方程不容易解，不容易求得一個完全精確解 (exact solution) 。那時，物理學家就會利用一些有效的近似，把方程簡化，然後來求得一個近似的解。近似的解與真正的解有多「近似」？ 物理學家用一個數學術語來說明：「這個解只是 correct to ... order」。甚麼意思？ 試以三角比為例，

原來 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ (θ是弧度) 有以下的展開式：

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots \tag{9}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\ldots \tag{10}$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \frac{17\theta^7}{315} + \ldots\ldots \tag{11}$$

以上是無限項 series。無限項加起的值是百份百左邊三角比的值。

當 θ 很小時，θ、θ^2、θ^3、θ^4, ……. 的值就會隨 θ 的指數越來越大而變得越來越小。

若把方程內三角比展開式中的 θ^2 和更高指數的項通通捨去，那時解出的答案當然不是 exact solution，我們只可說這方程的解只是準確至 θ 的一階 (correct to the first order of θ) 。同理，方程中保留了 θ 和 θ^2 下的解就會準確至 θ 的二階 (correct to the second order of θ) 。

「證明一」和「證明二」分別得出的運動方程 $-\frac{g}{\ell}s=\frac{d^2s}{dt^2}$ 和 $-\frac{g}{\ell}x=\frac{d^2x}{dt^2}$ 都是做了近似。大家都不完全準確，前者的準確程度限於 correct to the second order of θ，後者則限於 correct to the first order of θ。

證明一： 徑向 (radial) 的向心淨力用於圓周運動，切向 (tangential) 的淨力用於簡諧運動。

此證明在推導公式時，只用了 $\sin\theta\approx\theta$。從式（9），知道這近似等同於把公式的 θ^3 和以上的高階項捨去。 即是這方法得到的運動圖像可準確至 θ 的二階 correct to second order) 。

證明二：垂直方向沒有淨力，水平方向的淨力用於簡諧運動。

此方法在推導公式時只保留 θ 的一階 (first order) ，即是公式中所有高於 θ 一階的項全被捨去。在這準確程度下，向心加速也可忽略。

向心加速 $\propto v^2$。因為 $v\propto\theta$，所以向心加速是 θ 的二階項 (second order term) 。把 θ^2 和以上的項捨去時，向心加速亦隨之捨去。

把 θ^2 和以上的項捨去時，$\cos\theta\approx 1$，$T=mg\cos\theta$，$T=\frac{mg}{\cos\theta}$ 都是正確，是真的「垂直方向的力互相抵消」。

結語：

1. $-\frac{g}{\ell}s=\frac{d^2s}{dt^2}$ 和 $-\frac{g}{\ell}x=\frac{d^2x}{dt^2}$ 都是取了近似後的方程，分別只是前者比後者做了沒有那麼多的近似。前者是準確至θ的二階，而後者只是準確至θ的一階。
2. 兩套證明都不是完全精確解，兩者都做了 approximation。做 approximation 總不能說是 wrong concept。
3. 「證明二」不是 wrong concept，只是做了比常見的證明多一些 approximation 而已。雖然如此，「證明二」能否被老師接受，那就另一問題了。

吳老師 (Chiu-king NG)

http://ngsir.netfirms.com

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數