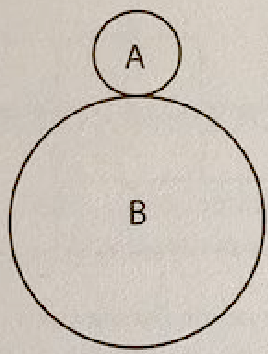
GEOMETRY PROBLEMS | 63

The following question is taken from a SAT general aptitude test that 300,000 Americans took in 1982. Only three students got the correct answer. Will you?

(31)

ROUND IN CIRCLES



The radius of circle A is $\frac{1}{3}$ of the radius of circle B. Circle A rolls around circle B one trip back to its starting point. How many times will circle A revolve in total?

(a) $\frac{3}{2}$
(b) 3
(c) 6
(d) $\frac{9}{2}$
(e) 9

Now for something to scrunch your mind in a different way.

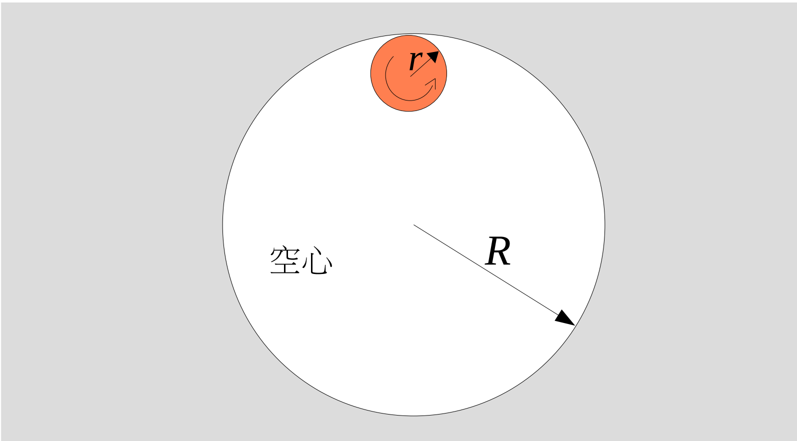
（網上圖片）

正確的答案不在那 5 個選擇中。

我們分別研究以下兩情況：

情況 1： 貼着 內 邊 界 滾動

半徑 r 的小圓盤貼着半徑 R 的圓坑的邊界作無滑動的滾動（rolling without slipping ）。小圓盤的自轉角速為 ω。問小圓盤滾動走完大圓坑邊界一次的時間為多少？



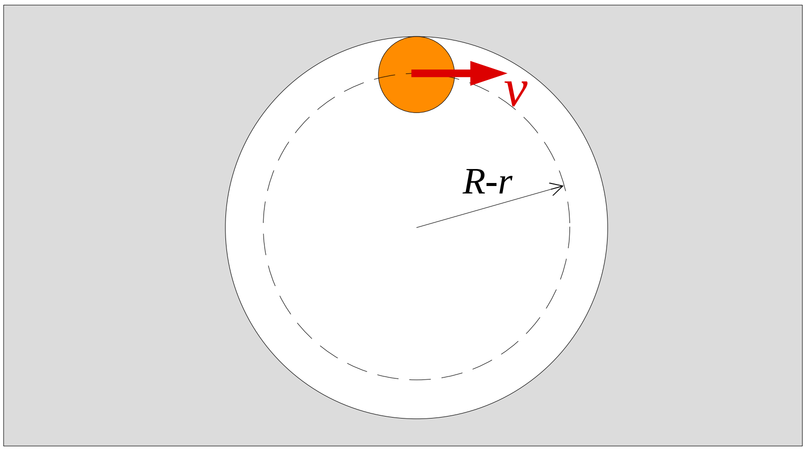
註：“無滑動的滾動（rolling without slipping)” 乃物理名詞。如果題目沒有題及，一般是預設了這樣的滾動。

算法一：

小圓盤的周界為 $2\pi r$，大圓坑的周界為 $2\pi R$，所以小圓盤需要滾動 $2\pi R / 2\pi r = R/r$ 次才可以沿坑的邊界走一圈。小圓盤轉動的周期為 $2\pi/\omega$，所以小圓盤沿大圓坑的邊界走一圈的時間為 $\dfrac{2\pi R}{\omega r}$ 。

算法二：

無滑動的滾動（rolling without sliding）的條件是 $v = \omega r$，其中 v 是小圓盤中心的平移速度（translational velocity）。雖然小圓盤不是直線運動，它中心的速率仍是 v。小圓盤中心行走的是一個半徑為 $(R\text{-}r)$ 的圓周界，即是 $d = 2\pi(R - r)$。



所以 小圓盤繞大圓走一圈的時間為 $d/v = \dfrac{2\pi(R-r)}{\omega r}$ 。

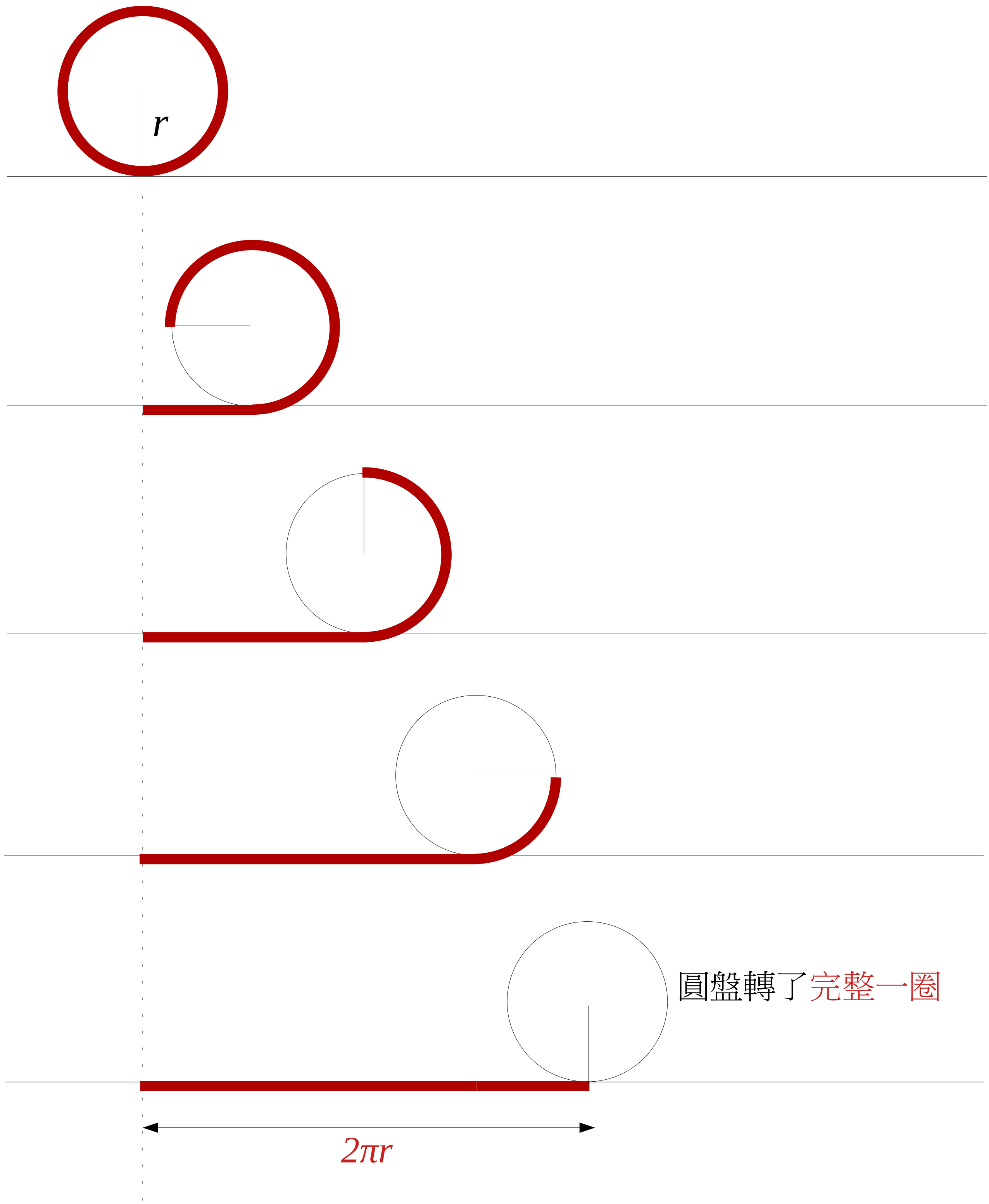
算法一和算法二的答案不同。其中有正確的答案嗎？

正確的答案是 $\dfrac{2\pi(R-r)}{\omega r}$ 。

「算法二」是對的，「算法一」啥地方出了問題？

分析：

此問題涉及一個概念，是關乎「無滑動的滾動」。問「圓盤壓在地上轉多少圈，圓盤中心前進的距離等於它的周界？」

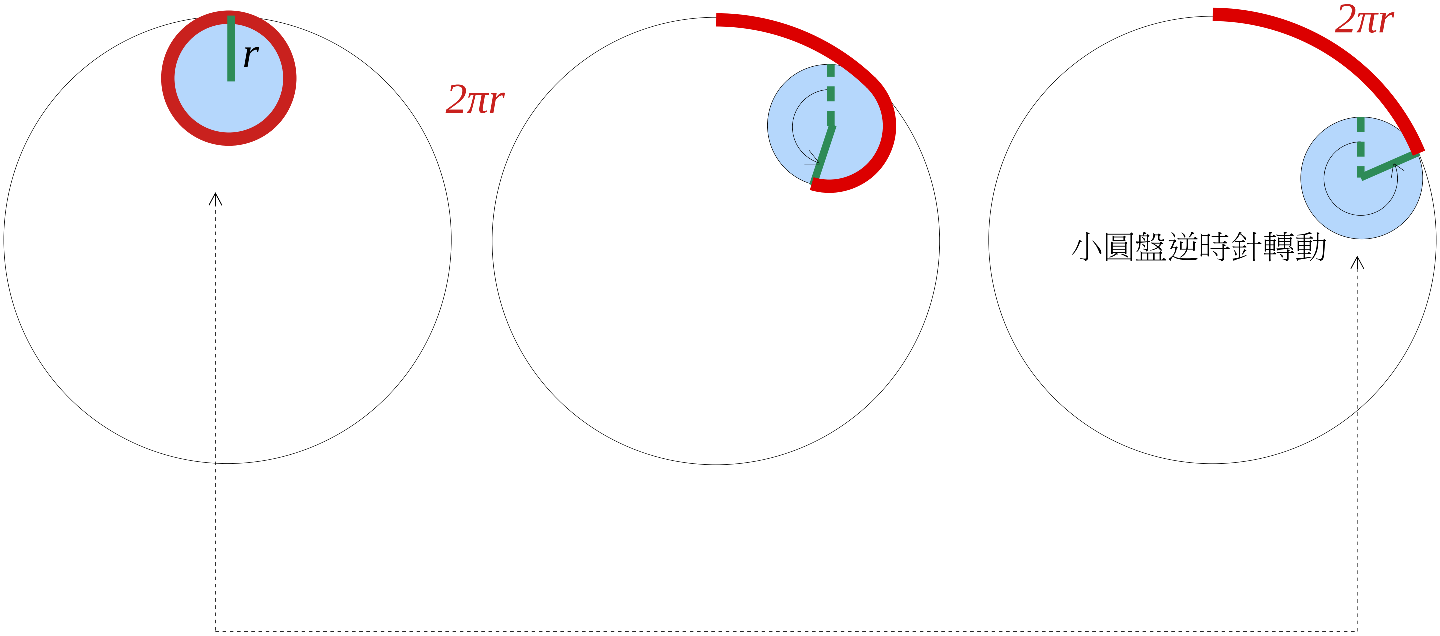


無錯，當在作無滑動的滾動（rolling without sliding）， 圓盤自轉一圈，它在

地上壓印的距離就是它的周界 $2\pi r$。

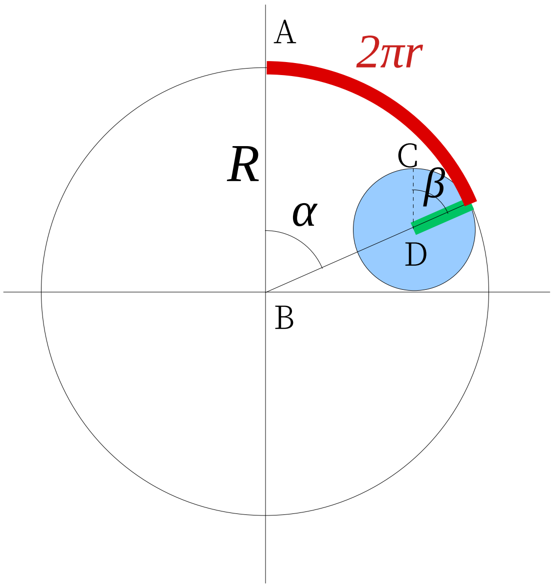
惟這說法只適用於平地。

若圓盤在一圓曲面上滾動，情況就很不一樣了！



留意那綠色半徑，開始時它是垂直向上。當在圓曲面上壓印出長度 $2\pi r$ 時，此半徑還未轉足夠一圈。換言之，小圓盤 自 轉 少 於 一 圈 已把它的周界壓印在那圓曲面上。

那欠多少才足夠一圈呢？



上圖 $\because$ $R\alpha = 2\pi r$

$\therefore$ $\alpha = 2\pi r/R$

及 $\beta = \alpha$ $(AB \,/\!/\, CD)$

所以，當小圓盤轉角 $2\pi - \beta = 2\pi - 2\pi r/R$ 時，它已在圓曲面上壓印出它的周界 $2\pi r$ 來。

總是少一圈

小圓盤的周界為 $2\pi r$，大圓坑的周界為 $2\pi R$。

當小圓盤繞大圓坑走一圈，是把 m 個 $2\pi r$ 放在 $2\pi R$ 上， 所以 $m=R/r$。此對應圓盤共轉了 m 個完整的 2π，但須減去 m 個角 β。後者即是 $m\beta = (R/r)\beta = 2\pi$，亦即是剛巧 少 了 一 圈。
即是圓盤轉的圈數實應為 $m-1 = R/r - 1$；這個「少一次」與 r 和 R 無關。

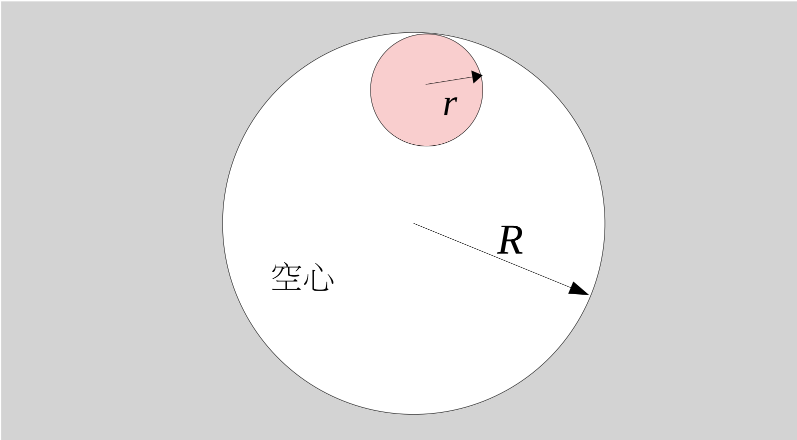
修改「算法一」

圓盤轉的圈數實應為 $R/r - 1$ 。

$\because$小圓盤的角速為 ω

$\because$小圓盤轉圈週期 T=2π/ω $\therefore$共需時間是（$R/r - 1$）T $= \dfrac{2\pi(R-r)}{\omega r}$ 。

例 1

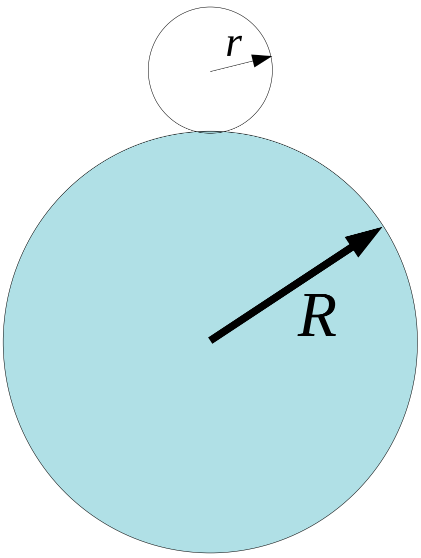


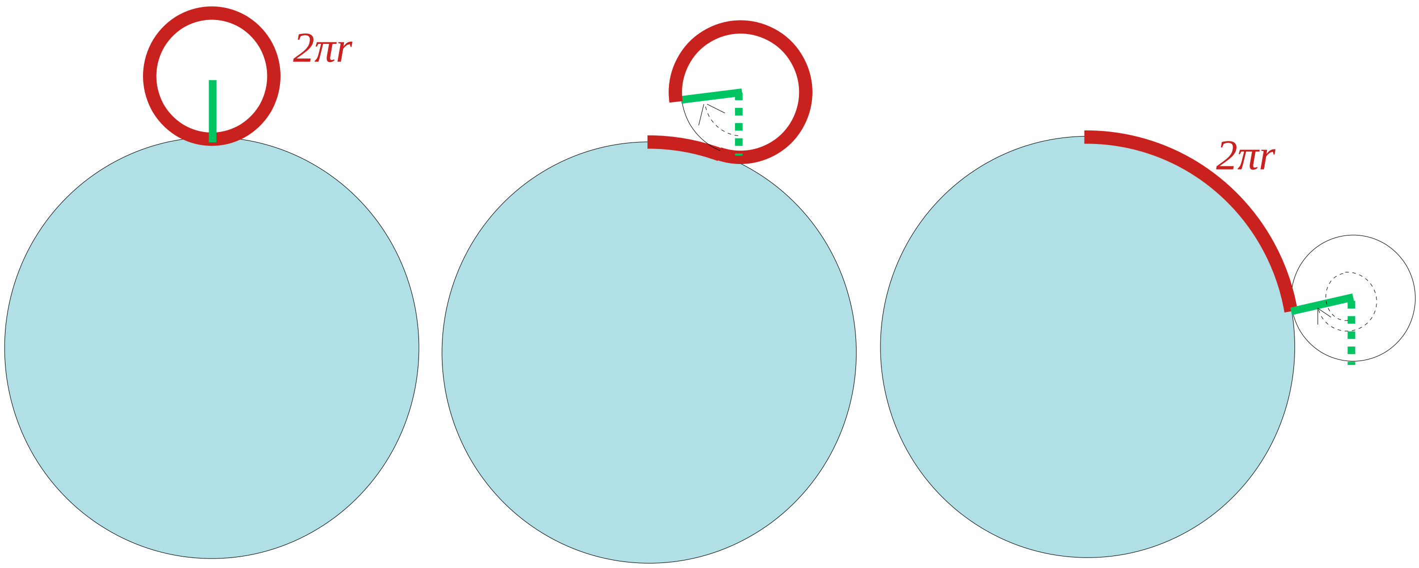
上圖 $R/r = 6$，小圓盤要轉多少圈可繞大圓坑邊界走一圈？

答：$R/r - 1 = 6 - 1 = 5$ 圈

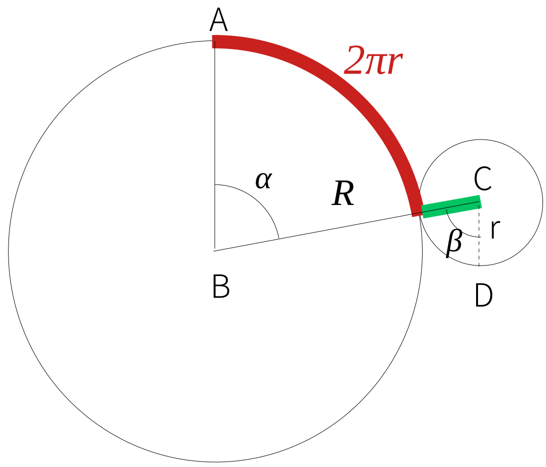
情況 2： 貼着 外 邊 界 滾動

半徑 r 的小圓盤貼着一固定不動、半徑為 R 的大圓盤的邊界作無滑動的滾動 (rolling without slipping)。小圓盤的自轉角速為 ω。問小圓盤滾動走完大圓盤邊界一次的時間為多少？





小圓盤要多於一圈 的自轉才可把它的周界 $2\pi r$ 壓印在那圓曲面上



參考上圖 $\because\ R\alpha = 2\pi r$

$\therefore\ \alpha = 2\pi r/R$

及 $\beta = \alpha\ \ (AB \parallel CD)$

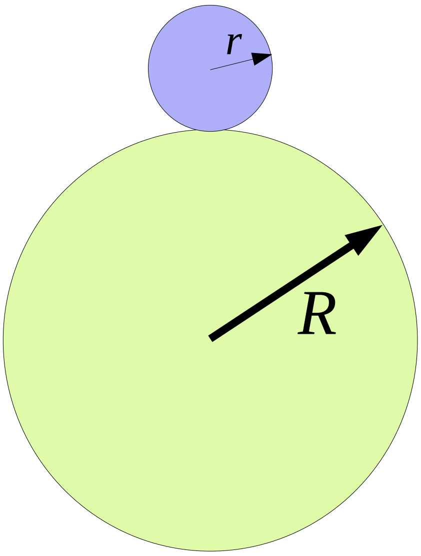
所以，當小圓盤轉角 $2\pi + \beta = 2\pi + 2\pi r/R$ 時，它才可把它的周界 $2\pi r$ 壓印在曲面上。

總是要多一圈

當圓盤繞大圓走一圈，是把 m 個 $2\pi r$ 放在 $2\pi R$ 上， 所以 $m=R/r$。此對應圓盤共轉了 m 個完整的圈 及加上 m 個 β 的角。後者即是 $m\beta = (R/r)\beta = 2\pi$，亦即是剛巧多一圈。

即是圓盤轉的圈數實應為 $R/r + 1$，而這個「多一次」與 r 和 R 無關。

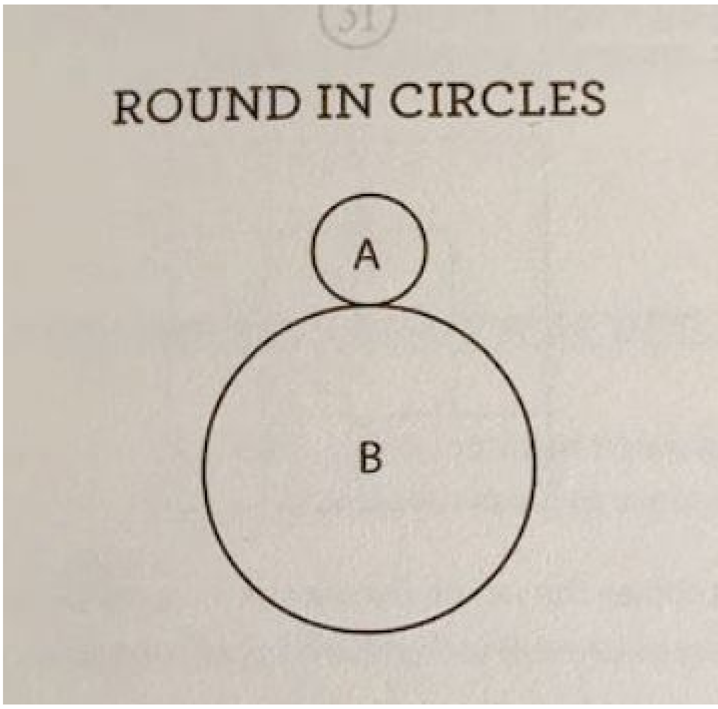
例 2



上圖 $R/r = 4$，小圓盤要轉多少圈可繞大圓邊界走一圈？

答：$R/r + 1 = 4 + 1 = 5$ 圈。

另一解法



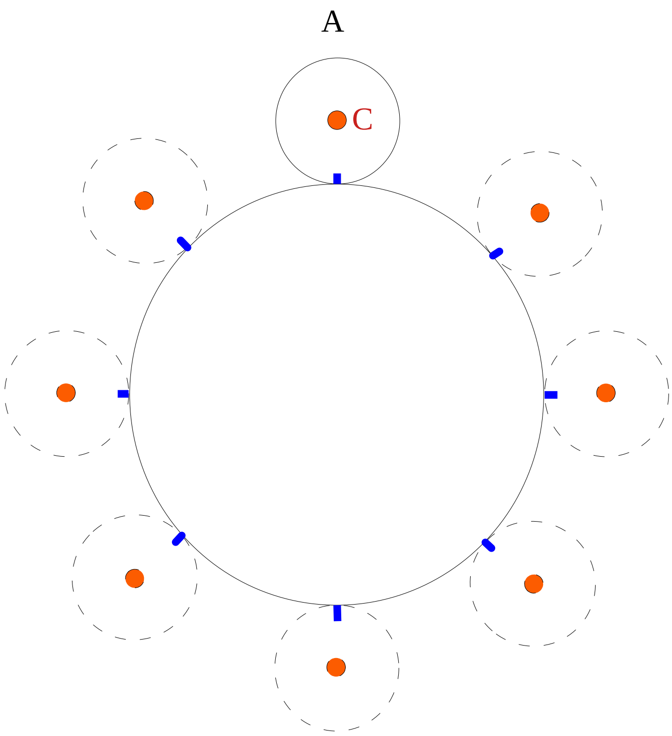
人們直觀的想法是，看看大圓的周界(2πR)可以容得下多少個小圓的周界(2πr)。譬如

$$\frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r} = 3 \text{ 。}$$

即是說大圓周界的長度可以讓小圓在其上滾動 3 次。

但答案不是「3 次」，而是「4 次」。

可以這樣理解。小圓在完全沒有把它的周界展放在大圓上的情況下而沿着大圓繞行一圈，小圓自己已自轉了一次。請參看下圖。



比較藍線與紅點的相對位置，可知藍線已繞紅點轉了一圈

在上圖，紅點是小圓圓心。藍線是小圓上一個 固 定 標 記。

當小圓從 A 出發，順時針方向繞大圓走一圈，

除 了 那 藍 線 外，小 圓 周 界 上 其 他 點 均 沒 有 接 觸 過 大 圓 ， 即是

小 圓 從 未 有 把 它 的 周 界 展 放 在 大 圓 上，但

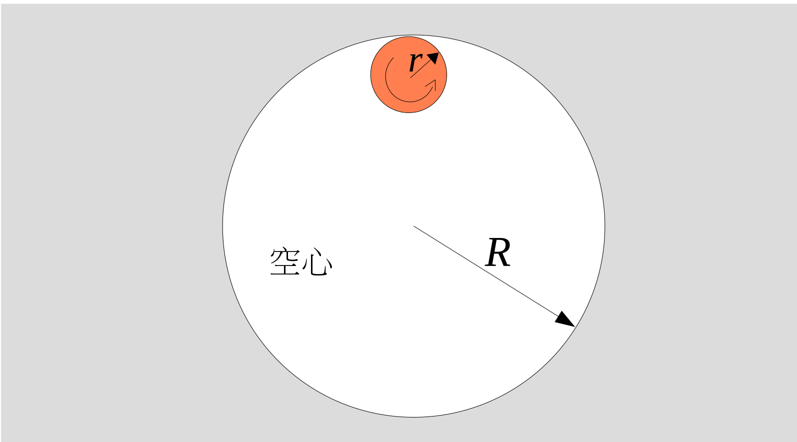
藍 線 已 繞 小 圓 中 心 順 時 針 方 向 轉 了 一 次。

當小圓的周界也展放在大圓上，小圓的轉動也也是順時針方向（從 A 出發）。

所以，

小 圓 實 際 自 轉 的 次 數 為
大 圓 周 界 可 以 容 得 下 多 少 個 小 圓 周 界 + 上 述 的 那 額 外 一 次

用這個思考方法，那又如何理解以下這情況總是「少一次」呢？



＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)
https://ngsir.netfirms.com
http://phy.hk
電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數